A 1

GRADO RELATIVO

Dato un sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx$$

$\boxed{u, y \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^n}$

si dice che ha grado relativo r rispetto a y se

$$CA^jB = 0 \qquad j = 0, \ldots, r-2$$

$$CA^{r-1}B \neq 0$$

Il grado relativo r è $\leq n$.

Infatti se così non fosse, essendo per il teorema di Cayley Hamilton

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \ldots - a_1 A - a_0 I$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$$

polinomio caratteristico di A

Quindi

$$CA^nB = -a_{n-1}CA^{n-1}B - \dots - a_1CAB - a_0CB$$

$$= 0$$

perciò $CA^kB = 0 \quad \forall k \geq 0$ che contraddice l'ipotesi di grado relativo.

Il grado relativo si può interpretare in termini della funzione di trasferimento $P(s) = C(sI-A)^{-1}B$.

Infatti, essendo

$$(sI-A)^{-1} = \mathcal{L}\{e^{At}\} =$$

$$\mathcal{L}\{I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots\} =$$

$$\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \dots$$

perciò

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B$$

$$= \frac{CB}{s} + \frac{CAB}{s^2} + \frac{CA^2B}{s^3} + \dots$$

perciò se il grado relativo è r

$$P(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{CA^{r-1}B}{s^r} + \frac{CA^rB}{s^{r+1}} + \dots$$

cioè è infinitesima di ordine r.

Quindi r è la differenza tra il numero dei poli n e il numero degli zeri.

1. Se un sistema ha grado relativo r, allora $C, CA, CA^2, \dots, CA^{r-1}$ sono linearmente indipendenti. Se $r<n$ è sempre possibile trovare $n-r$ vettori riga $\theta_1, \dots, \theta_{n-r}$ tali che

$$T = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-r} \end{pmatrix} \text{ è nonsingolare.}$$

A.4

Infatti

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} B & AB & \dots & A^{r-2}B & A^{r-1}B \end{pmatrix}}^{r} \Big\} n$$

$$= \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & CA^{r-1}B \\ 0 & 0 & & CA^{r-1}B & CA^{2}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{r-1}B & CA^{r}B & \dots & CA^{2r-3}B & CA^{2r-2}B \end{pmatrix}}^{r}}_{\text{INVERTIBILE}} \Bigg\} r$$

poiché $CA^{r-1}B \neq 0$. Ma

$$r = \text{rango}(MN) \leq \min\{\text{rango}\, M, \text{rango}\, N\}$$

e quindi

$$r \leq \min\{\text{rango}\, M, \text{rango}\, N\} \leq r$$

$$\Rightarrow \text{rango}\, M = \text{rango}\, N = r$$

4.5

Per la seconda parte di 1 certamente esistono $n-1$ vettori $\gamma_1 \cdots \gamma_{n-1}$ linearmente indipendenti:

$$\gamma_1 B = \gamma_2 B = \dots = \gamma_{n-1} B$$

Si considerino i vettori

$$\begin{array}{c} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{r-1} \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{array}$$

Sia

$$T_1 = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{pmatrix}$$

si ha

$$\ker T_1 \cap \operatorname{Im} B = 0$$

poiché altrimenti esisterebbe $a \neq 0$ tale che $aCB = aCAB = \dots = aCA^{r-1}B = 0$ e quindi ciò contraddice l'ipotesi di grado relativo.

Ma passando agli spazi ortogonali

$$(\ker T_1)^{\perp} + (\mathrm{Im}\, B)^{\perp} = \mathbb{R}^n$$

Quindi prendendo $\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{r-1} \end{pmatrix}$

posso aggiungere $n-r$ vettori scelti $v_1 \dots v_{n-r}$ (che sono una base di $(\mathrm{Im}\, B)^{\perp}$) per avere una base di righe per $\mathbb{R}^n$.

Vediamo nelle nuove coordinate

$$z = T x$$

come si scrive $\dot{x} = Ax + Bu$
$y = Cx$

A.7

Sia $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Allora

$$\dot{z}_1 = C\dot{x} = CAx + CBu = CAx = z_2$$

$$\dot{z}_2 = CA\dot{x} = CA^2x + CABu = CA^2x = z_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_r = CA^{r-1}\dot{x} = CA^r x + CA^{r-1}Bu =$$

$$= \underbrace{CA^r T^{-1}}_{\searrow} z + \underbrace{CA^{r-1}B}_{\searrow} u$$

$$= (\tilde{a}_{r1} \ \dots \ \tilde{a}_{rn})z + b_r u$$

$$\dot{z}_i = (\tilde{a}_{i1} \ \dots \ \tilde{a}_{in})z + \underbrace{b_i u}_{= 0}$$

con $i = r+1, \dots, n$. poiché $b_i = \gamma_{j_i} \cdot B = 0$

Inoltre

$$y = Cx = z_1$$

A.8

Con $\xi = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

si scrive

$$\boxed{\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot\xi \\ \dot\eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

FORMA NORMALE

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \tilde a_{r1} & \tilde a_{r2} & \cdots & \tilde a_{rr} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde a_{r,r+1} & \tilde a_{r,r+2} & \cdots & \tilde a_{rn} \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_r \end{pmatrix} \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(A.9)

(2) Se il sistema ha grado relativo r allora

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix}}_{\text{zeri della funzione } P(s)} = CA^{r-1}B \cdot \det(A_{n}-\lambda I)$$

Dapprima vediamo che

$\det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ sono gli zeri di $P(s)$

Infatti essendo

$$\det\begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix} = \det M \cdot \det(Q - PM^{-1}N)$$

per ogni M nonsingolare

allora

$$\det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = \det(A-\lambda I)\det\left(C(\lambda I - A)^{-1}B\right)$$

$$= \det(A-\lambda I)\, P(s)$$

Se $\boxed{\det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = cA^{r-1}B \det(A_n - \lambda I)}$ (H)

allora

zeri di $P(s)$

$$P(s) = \underbrace{cA^{r-1}B}_{\neq 0}\ \frac{\boxed{\det(A_n - \lambda I)}}{\boxed{\det(A-\lambda I)}}$$

poli di $P(s)$

Dimostriamo (H). Sia

$$q(\lambda) = \det\begin{pmatrix} A-\lambda I & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

e $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$.

Allora

A.11

$$q(\lambda) = \det \left(\begin{array}{c|c} A - \lambda I & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right)$$

$$= \det \left[\left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A - \lambda I & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} T^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \right]$$

$$= \det \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} - \lambda I & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & 0 \end{array} \right)$$

Analogamente $\forall$ K (di dimensioni opportune)

$$q(\lambda) = \det \left(\begin{array}{c|c} A - \lambda I & B \\ C & 0 \end{array} \right)$$

$$= \det \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} - \lambda I & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & 0 \end{array} \right) =$$

$$= \det \left[\left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} - \lambda I & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ K & I \end{array} \right) \right]$$

A.12

Sia T scelta in modo tale che il sistema sia in forma normale e si prenda

$$K = \frac{1}{\tilde{b}_r}\left(0 \;\dots\; 0 \;\; -\tilde{a}_{r,r+1} \;\dots\; -\tilde{a}_{rn}\right)$$

Quindi

$$\tilde{A}+\tilde{b}K = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

e

$$q(\lambda) = \det \left(\begin{array}{cc|c} A_{11}-\lambda I & 0 & B_1 \\ A_{21} & A_{22}-\lambda I & 0 \\ \hline c_1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(a meno di permutazioni)

$$\downarrow$$
$$=$$

$$\det \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ A_{11}-\lambda I & B_1 & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{22}-\lambda I \end{pmatrix}$$

(A, B)

$$= \det \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ A_{11}-\lambda I & B_1 \end{pmatrix} \det(A_{22}-\lambda I)$$

ma

$$\det \left(\begin{array}{c|c} e_1 & 0 \\ \hline A_{11}-\lambda I & B_1 \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ \hline -\lambda & 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & 1 & 0 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \dots & & \tilde{a}_{22}-\lambda & b_2 \end{array}\right)$$

$$= b_2$$

e infine

$$\boxed{q(\lambda) = b_2 \det(A_{22}-\lambda I)}$$

Ora consideriamo

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad u, y \in \mathbb{R}^m$$
$$y = Cx \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Si dice che il sistema ha grado relativo vettoriale $\{r_1, \dots, r_m\}$ se

- $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{riga } i\text{-sima di } C}}{C_i} B = C_i A B = \dots = C_i A^{r_i - 2} B = 0$

- la matrice

$$U = \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1 - 1} B \\ \vdots \\ C_m A^{r_m - 1} B \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\text{e' invertibile.}}_{}$

MATRICE DI DISACCOPPIAMENTO
(rispetto a y)

Analogamente al caso $m = 1$ si dimostra che le righe

$$\left.\begin{matrix} c_1 \\ c_1 A \\ \vdots \\ c_1 A^{r_1 - 1} \end{matrix}\right\} T_1$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{matrix} c_m \\ c_m A \\ \vdots \\ c_m A^{r_m - 1} \end{matrix}\right\} T_m$$

sono linearmente indipendenti.

Inoltre esistono $n - r$ $\left(\text{con } r := \sum_{i=1}^{m} r_i\right)$ vettori $\theta_1 \dots \theta_{n-r}$ tali che

$$\theta_1 B = \theta_2 B = \dots = \theta_{n-r} B = 0$$

e $T = \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_m \\ \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n-r} \end{pmatrix}$ è invertibile.

(A.16)

Sia $z = \begin{pmatrix} z_{11} \\ \vdots \\ z_{1r_1} \\ \hline \vdots \\ \hline z_{m1} \\ \vdots \\ z_{mr_m} \\ \hline z_{r+1} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ \xi_1 \\ \vdots \\ \}\ \xi_m \\ \}\ \eta \end{matrix}$

Nelle nuove coordinate il sistema è

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_m \\ \hline \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} & \cdots & A_{1,m+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{mm} & \cdots & A_{m,m+1} \\ \hline A_{m+1,1} & \cdots & A_{m+1,m} & & A_{m+1,m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \\ \hline \eta \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \\ \hline 0 \end{pmatrix} u$$

$$\eta = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & C_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \\ \hline \eta \end{pmatrix}$$

A.17

e

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{r_i} \end{pmatrix} \qquad b_{r_i} = c_i A^{r_i - 1} B$$

$$C_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Inoltre

zeri di $P(s)$

$$\det P(s) = \det U \cdot \frac{\det(A_{m+1,m+1} - \lambda I)}{\det(A - \lambda I)}$$