Identificazione e Filtraggio nei Sistemi Dinamici - Compito A - Appello del 28 Giugno 2011

[tempo 2 ore; no testi]

1) Dato il processo

$$x(j+1) = \begin{pmatrix} 1 & j-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(j),\ j = 0, 1, \ldots,$$
$$y(j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(j),\ j = 1, 2, \ldots,$$

si effettuano misure rumorose $\{z(j)\}$ di $\{y(j)\}$ con sequenza aleatoria di rumore $\{\nu(j)\}$ stazionaria, bianca, con valor medio nullo e varianza unitaria. Dire qual'è il minimo valore di k per cui la stima di Markov di $x(k)$ mostra un errore quadratico medio inferiore a 2. Inoltre fornire la stima di Markov di $x(2)$ con le due misure $\check{z}_1 = 0.5$, $\check{z}_2 = 1$.

2) Dato il processo

$$x(j+1) = \begin{pmatrix} \theta^2 & 1 \\ 0 & -\theta \end{pmatrix} x(j) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} m(j),\ j = 0, 1, \ldots,$$
$$y(j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(j),\ j = 1, 2, \ldots,$$

con $\theta \in [-1, 1]$, si effettuano misure rumorose $\{z(j)\}$ di $\{y(j)\}$ con sequenza aleatoria di rumore $\{\nu(j)\}$ le cui componenti sono indipendenti e equidistribuite con densità

$$p(\nu) = \begin{cases} \exp^{-\nu} & \text{if } \nu > 0 \\ 0 & \text{if } \nu \leq 0 \end{cases}$$

Fornire una stima di massima verosimiglianza con tre misure $\check{z}_1 = 0.5$, $\check{z}_2 = 1.5$, $\check{z}_3 = 2.5$, sapendo che $m(j) = 0$ per ogni $j < 0$, $m(0) = 1$, $m(1) = 0$ e $m(2) = -1$.

3) Dato il processo

$$x(j+1) = x(j),\ j = 0, 1, \ldots,\ y(j) = Cx(j),\ j = 1, 2, \ldots,$$

con $x(j) \in \mathbb{R}$ e $C \in \mathbb{R}$, si effettuano misure rumorose $\{z(j)\}$ di $\{y(j)\}$ con sequenza aleatoria di rumore $\{\nu(j)\}$ stazionaria, gaussiana e bianca, con valor medio nullo e varianza unitaria. Anche $x(0)$ si assume gaussiano e incorrelato con $\{\nu(j)\}$. Si indichi il filtro di Kalman di regime e se ne discutano al variare di C le proprietà asintotiche.
P.S. Le equazioni del filtro di Kalman sono

$$\hat{x}(j+1|j+1) = \hat{x}(j|j) + \Psi_{\hat{e}(j+1|j+1)} C[z(j+1) - C\hat{x}(j|j)],$$
$$\Psi_{\hat{e}(j+1|j+1)} = \Psi_{\hat{e}(j|j)}[I + C^2 \Psi_{\hat{e}(j|j)}]^{-1},$$