Computational Game Theory

Vincenzo Bonifaci

8 giugno 2011

1 Giochi: esempi e definizioni

La teoria dei giochi studia situazioni in cui molteplici entità razionali che perseguono il proprio interesse (individui, ditte, nazioni, ecc.) si trovano ad interagire.

Un "gioco in forma normale" tenta di modellare una situazione in cui le entità devono prendere le loro decisioni simultaneamente ed indipendentemente l'una dall'altra.

Un esempio è il seguente gioco di Carta, Forbici e Sasso. Possiamo rappresentarlo con una tabella in cui le righe corrispondono alle decisioni del Giocatore 1 e le colonne alle decisioni del Giocatore 2.

G1, G2	sasso	carta	forbici
sasso	patta	vince G2	vince G1
carta	vince G1	patta	vince G2
forbici	vince G2	vince G1	patta

Definizione 1.1. Un *gioco in forma normale* è dato da:

- un insieme N (insieme di *giocatori*); spesso usiamo $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- per ogni $i \in N$, un insieme non vuoto S_i (*strategie* del giocatore i)

L'insieme $S := S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ è detto l'insieme degli *stati* del gioco.

- per ogni $i \in N$, una funzione $u_i : S \to \mathbb{R}$ (funzione *utilità* o *guadagno*)

Esempio 1.2 (Carta, Forbici e Sasso)**.**

u_1, u_2	sasso	carta	forbici
sasso	0, 0	-1, 1	1, -1
carta	1, -1	0, 0	-1, 1
forbici	-1, 1	1, -1	0, 0

Notiamo che il gioco Carta, Forbici e Sasso è un gioco *a somma zero*: in qualunque stato del gioco, la somma delle utilità dei giocatori è zero. Il gioco Carta, Forbici e Sasso è anche *finito*: l'insieme N dei giocatori ha cardinalità finita, così come gli insiemi di strategie $S_1, \ldots, S_n$.

Esempio 1.3 (Dilemma del Prigioniero)**.** Due sospetti vengono interrogati in celle separate. Ognuno di loro può confessare o non confessare il crimine. Se entrambi confessano, ognuno di loro passerà 4 anni in prigione. Se uno confessa e l'altro no, quello che ha confessato passerà 1 anno in prigione e l'altro 5. Se entrambi non confessano, saranno condannati a 2 anni ciascuno.

Talvolta, come in questo caso, è più naturale usare funzioni di *costo* $(c_i)_{i\in N}$ in luogo delle funzioni di utilità $(u_i)_{i\in N}$; la cosa è equivalente se definiamo $u_i := -c_i$.

c_1, c_2	confessa	non confessa
confessa	4, 4	1, 5
non confessa	5, 1	2, 2

Notiamo che il Dilemma del Prigioniero *non* è un gioco a somma zero; comunque è un gioco finito.

Finora abbiamo visto giochi a due giocatori, ma chiaramente ci sono giochi con più di due giocatori.

Esempio 1.4 (Condivisione di Banda)**.** Un gruppo di n utenti deve condividere una connessione Internet con una banda limitata. Ogni utente può decidere quanta frazione di banda usare (da nessuna a tutta). L'utilità di ogni utente è tanto maggiore quanto maggiore è tale frazione, ma decresce se la banda non utilizzata da nessuno si riduce troppo (i pacchetti vengono ritardati per troppo tempo).

Possiamo modellare il gioco definendo

- $N := \{1, \ldots, n\}$;
- $S_i := [0, 1]$ per ogni $i \in N$;
- $u_i(s) := s_i \cdot (1 - \sum_{j\in N} s_j)$, dove $s_i \in S_i$ è la strategia selezionata dal giocatore i e $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

Notiamo che questo gioco non è finito: l'insieme dei giocatori è finito, ma ciascun insieme di strategie ha cardinalità infinita.

Esempio 1.5 ("Corsa dei Polli")**.** Due automobilisti sono diretti l'uno contro l'altro su una strada ad una sola corsia. Ognuno di loro può continuare dritto o sterzare. Se entrambi sterzano, otterranno entrambi una utilità nulla. Se uno sterza mentre l'altro va dritto, quello che ha sterzato è il "Pollo" e otterrà un'utilità negativa, mentre l'altro avrà un'utilità positiva. Se entrambi vanno dritti, comunque, si avrà un disastro molto costoso per i giocatori poiché entrambe le macchine saranno distrutte.

u_1, u_2	sterza	dritto
sterza	0, 0	-1, 5
dritto	5, -1	-100, -100

Notiamo che tutti i giochi finora discussi (giochi in forma normale) sono "one-shot" nel senso che i giocatori muovono simultaneamente e interagiscono un'unica volta. Ci sono anche modelli di giochi in cui i giocatori muovono uno dopo l'altro (*giochi in forma estesa*) o in cui lo stesso gioco in forma normale viene giocato molte volte (*giochi ripetuti*). Comunque in questo corso ci concentreremo sui giochi in forma normale.

Rappresentazione dati del gioco

Quando un gioco dev'essere processato al calcolatore, occorre trovare dei modi di rappresentare il gioco in maniera concisa. In un gioco in forma normale con un numero costante di giocatori, possiamo rappresentare l'intera tabella delle utilità in maniera esplicita; la sua dimensione sarà polinomiale nel numero totale di strategie. Se il numero di giocatori non è costante (come nel gioco della Condivisione di Banda) occorre rappresentare le funzioni che calcolano le utilità con una codifica in qualche formalismo (ad esempio come programmi C o come macchine di Turing).

Notiamo anche che in generale non possiamo rappresentare al calcolatore dei numeri reali; nella maggior parte dei casi dovremo quindi assumere che il codominio delle funzioni di utilità non sia $\mathbb{R}$, ma piuttosto $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$.

2 Concetti di soluzione

Una volta modellato un gioco, vorremmo sapere quali stati del gioco rappresentano esiti plausibili, assumendo che i giocatori siano razionali e perseguano i propri interessi. Ci sono diversi modi di far questo; ognuno di essi dà luogo ad un diverso *concetto di soluzione.* Diversi concetti di soluzione hanno diverse interpretazioni, vantaggi e svantaggi.

2.1 Equilibri in strategie dominanti

Consideriamo uno stato del gioco $\Gamma = (N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N})$. L'utilità del giocatore i nello stato $s \in S$ dipenderà in genere sia dall'azione del giocatore i stesso (s_i) che dalle azioni degli altri giocatori, che per comodità denoteremo con s_{-i}. Possiamo cioè riscrivere $u_i(s)$ (utilità del giocatore i nello stato s) come $u_i(s_i, s_{-i})$. *Facciamo molta attenzione* leggendo (o usando) questa notazione: essa non riordina le componenti del vettore s, ma semplicemente le scrive in un modo diverso. Per esempio, con la notazione (z_i, s_{-i}) intendiamo il vettore dello stato ottenuto da s rimpiazzando la i-esima componente di s con z_i.

L'idea di un equilibrio in strategie dominanti è che se ogni giocatore ha un'azione che è migliore delle altre *indipendentemente da ciò che fanno gli altri giocatori*, allora questo è sicuramente un possibile esito del gioco. Possiamo formalizzare ciò come segue.

Definizione 2.1. Lo stato $s \in S$ è un *equilibrio in strategie dominanti* se per ogni $i \in N$ e per ogni $s' \in S$,

$$u_i(s_i, s'_{-i}) \geq u_i(s'_i, s'_{-i}).$$

(In termini di costi: $c_i(s_i, s'_{-i}) \leq c_i(s'_i, s'_{-i})$.)

Esempio 2.2 (Strategie dominanti nel Dilemma del Prigioniero)**.** Lo stato (non confessa, non confessa) è un equilibrio in strategie dominanti nel gioco del Dilemma del Prigioniero? La risposta è no: quando $s =$(non confessa, non confessa), c'è un giocatore ($i = 1$) e uno stato alternativo $s' =$(confessa, non confessa) per il quale c_1(non confessa, non confessa) $>$ c_1(confessa, non confessa). Ciò contravviene alla definizione.

Lo stato (confessa,confessa) è un equilibrio in strategie dominanti? Per esserne sicuri dobbiamo verificare 8 casi (2 giocatori per 4 stati) ma la risposta è sì. Il punto è che non importa ciò che l'altro giocatore fa, per ogni giocatore è più conveniente confessare che non confessare. Quindi (confessa,confessa) è un equilibrio in strategie dominanti.

Un equilibrio in strategie dominanti rappresenta un tipo "forte" di equilibrio: ogni giocatore può affidarsi alla sua strategia indipendentemente da ciò che fanno gli altri. Sfortunatamente tale concetto di soluzione ha un grosso svantaggio: non sempre esso esiste!

Esercizio 2.1. Mostrare che il gioco della Corsa dei Polli non ha equilibri in strategie dominanti.

Poiché esso non sempre esiste, non possiamo usare il concetto di equilibrio in strategie dominanti per predire ciò che accadrà in un gioco: i giocatori faranno certamente *qualcosa*, ma questo qualcosa non sarà sempre un equilibrio in strategie dominanti, semplicemente per il fatto che il gioco potrebbe non ammettere un tale equilibrio.

2.1.1 Trovare equilibri in strategie dominanti

Come troviamo, dato un gioco, i suoi equilibri in strategie dominanti? Se il gioco è finito e c'è un numero costante di giocatori ciò può essere fatto in maniera efficiente. Poiché c'è un numero polinomiale di stati ($|S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots |S_n|$, con n costante) verifichiamo semplicemente, per ogni stato, se esso soddisfa la condizione della definizione di equilibrio in strategie dominanti.

2.2 Equilibri di Nash puri

L'idea di equilibrio di Nash puro è quella di dire che uno stato è un equilibrio se l'azione di ogni giocatore è la migliore possibile, *assumendo che gli altri giocatori non cambino la propria azione.* Ovvero, nessun giocatore ha interesse a deviare in maniera unilaterale dalla propria azione; nessuno ha interesse ad alterare *da solo* lo "status quo".

Definizione 2.3. Uno stato $s \in S$ è un *equilibrio di Nash puro* (ENP) se per ogni $i \in N$ e per ogni $s'_i \in S_i$,

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}).$$

La definizione è apparentemente molto simile a quella di equilibrio in strategie dominanti; il lettore dovrebbe cercare di comprendere appieno la differenza.

Comunque, una relazione c'è e in effetti ogni equilibrio in strategie dominanti è anche un equilibrio di Nash (perché?).

L'inverso non è vero: esistono dei giochi senza equilibri in strategie dominanti che hanno equilibri di Nash puri.

Esempio 2.4 (ENP nel gioco della Corsa dei Polli)**.** Lo stato $s =$(dritto,dritto) è un ENP nel gioco della Corsa dei Polli? La risposta è no: esiste un giocatore ($i = 1$) e una strategia alternativa s'_i (sterza) tale che $-100 = u_1(\text{dritto, dritto}) < u_1(\text{sterza, dritto}) = -1$. Ciò contravviene alla definizione.

Lo stato $s =$(sterza,dritto) è un ENP nel gioco della Corsa dei Polli? Cerchiamo di capirlo. Se il giocatore 1 sa che il giocatore 2 andrà dritto, sterzare (-1) è per lui un'opzione migliore che andare dritto (-100). D'altra parte, se il giocatore 2 sa che il giocatore 1 sterza, andare dritto (5) è preferibile a sterzare (0). Quindi (sterza, dritto) è un ENP.

Notiamo che l'equilibrio di Nash puro non è necessariamente unico: infatti, nel gioco della Corsa dei Polli, ce ne sono due (qual è l'altro?).

Studiamo un esempio più complicato.

Esempio 2.5 (ENP nel gioco di Condivisione di Banda)**.** Analizziamo cosa farà il giocatore i quando le strategie degli altri giocatori sono $s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$. Definiamo $t := \sum_{j \neq i} s_i$. Dal punto di vista del giocatore i, la quantità t è una costante. Per definizione delle utilità abbiamo $u_i(s) = s_i \cdot (1 - t - s_i)$. Il giocatore i può controllare la variabile unidimensionale $s_i \in [0, 1]$. Derivando $u_i(s)$ rispetto ad s_i otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial s_i} u_i(s) = 1 - t - 2s_i.$$

Dall'analisi matematica sappiamo che il massimo di u_i si ha quando $\frac{\partial}{\partial s_i} u_i(s) = 0$ (oppure quando s_i è un estremo dell'intervallo $[0, 1]$, ma nel nostro esempio non è questo il caso). Quindi il giocatore selezionerà $s_i = \frac{1}{2}(1 - t) = \frac{1}{2}(1 - \sum_{j \neq i} s_j)$. Questo è vero per ogni $i \in N$, quindi per simmetria otteniamo che $s_i = 1/(n + 1)$ per ogni i.

Sfortunatamente, sebbene il concetto di equilibrio puro di Nash si applica ad una classe più larga di giochi, esso soffre dello stesso problema dell'equilibrio in strategie dominanti: ovvero non esiste sempre.

Esercizio 2.2. Mostrare che il gioco Carta, Forbici e Sasso non ammette ENP.

2.2.1 Trovare equilibri di Nash puri

Quando il gioco è finito e il numero di giocatori costante, possiamo trovare in modo efficiente tutti gli equilibri di Nash puri del gioco enumerando tutti gli stati, come fatto nel caso degli equilibri in strategie dominanti.

2.3 Equilibri di Nash misti

Per quanto visto finora, i giocatori non avevano modo di "interpolare" tra due azioni: si selezionava o un'azione a, oppure un'azione diversa, ad es. b. Rilassiamo ora questo vincolo permettendo ai giocatori di selezionare una distribuzione di probabilità sulle azioni. Per esempio, un giocatore potrebbe selezionare l'azione a con probabilità $1/4$, l'azione b con probabilità $1/3$, e l'azione c con probabilità $5/12$. Tali strategie sono chiamate *miste*, in contrasto con le normali strategie deterministiche (cosiddette *pure*). Le strategie pure sono forse più naturali, ma spesso le strategie che emergono dagli esiti di un gioco sono in effetti strategie miste.

Definizione 2.6. Una *strategia mista* per il giocatore i è una distribuzione di probabilità sull'insieme S_i delle strategie pure. Vale a dire, è una funzione $p_i : S_i \to [0, 1]$ tale che $\sum_{s_i \in S_i} p_i(s_i) = 1$. Uno *stato misto* è una famiglia $(p_i)_{i \in N}$ che consiste di una strategia mista per ogni giocatore.

Notiamo che ogni stato pure s ha probabilità $p(s) := p_1(s_1) \cdot p_2(s_2) \cdot \ldots \cdot p_n(s_n)$ di realizzarsi.

Quindi, uno stato misto $(p_i)_{i \in N}$ induce un'*utilità attesa* per il giocatore i pari a $\sum_{s \in S} p(s) \cdot u_i(s)$. Questa è l'utilità attesa dello stato selezionato probabilisticamente dai giocatori secondo le loro strategie miste.

Possiamo ora definire la nozione di equilibrio di Nash misto (ENM).

Definizione 2.7. Uno stato misto è un *equilibrio di Nash misto* se nessun giocatore può migliorare in maniera unilaterale la sua utilità attesa passando ad una diversa strategia mista.

Poiché le strategie miste sono una generalizzazione di quelle pure, non è difficile vedere che ogni ENP è anche un ENM. L'inverso non è verso. Infatti ci sono giochi senza ENP che ammettono ENM. Anzi, è vero molto di più: il fatto sorprendente è che ogni gioco finito (gioco in cui sia N che S hanno cardinalità finita) ammette almeno un equilibrio di Nash misto.

Teorema 2.1 (Nash 1950)**.** *Ogni gioco finito ammette almeno un equilibrio di Nash misto.*

Esempio 2.8 (ENM per Carta, Forbici e Sasso)**.** Abbiamo già visto che il gioco Carta, Forbici e Sasso non ha equilibri di Nash puri. Secondo il Teorema di Nash esso ammette almeno un equilibrio misto. Infatti sosteniamo che se definiamo $p := (1/3, 1/3, 1/3)$, allora (p, p) è un ENM.

Verifichiamolo. Consideriamo ad esempio il giocatore 1. Dobbiamo verificare che quando il giocatore 2 usa la distribuzione di probabilità p, il giocatore 1 non ha incentivo a giocare una strategia mista diversa da p. (Dovremmo anche fare un controllo simile con i ruoli dei due giocatori invertiti, ma in questo caso tutto è simmetrico).

Se il giocatore 2 usa la strategia mista p, e il giocatore 1 usa la strategia mista $q = (a, b, c)$ con $a + b + c = 1$, allora l'utilità attesa per giocatore 1 diviene

$$\begin{aligned}
&a \cdot 1/3 \cdot (0) + a \cdot 1/3 \cdot (-1) + a \cdot 1/3 \cdot (+1)+\\
&b \cdot 1/3 \cdot (+1) + b \cdot 1/3 \cdot (0) + b \cdot 1/3 \cdot (-1)+\\
&c \cdot 1/3 \cdot (-1) + c \cdot 1/3 \cdot (+1) + c \cdot 1/3 \cdot (0) = 0.
\end{aligned}$$

Quindi l'utilità attesa è costante (0) indipendentemente dal valore di a, b e c! Questo significa che il giocatore 1 non ha interesse a cambiare i valori di a, b o c. Allo stesso modo, quando il giocatore 1 gioca $(1/3, 1/3, 1/3)$, il giocatore 2 non ha incentivo a usare una strategia diversa da $(1/3, 1/3, 1/3)$. I due giocatori si "bloccano" l'un l'altro nell'equilibrio di Nash misto.

A questo punto potrebbe non essere del tutto chiaro perché un altro stato misto, quale ad esempio $((1/2, 1/4, 1/4), (1/2, 1/4, 1/4))$, non sia un ENM. Il motivo è che se per esempio il giocatore 2 gioca una strategia diversa da $(1/3, 1/3, 1/3)$, allora le tre azioni del giocatore 1 non sono più interscambiabili per lui. In questo caso, quando il giocatore 2 gioca $(1/2, 1/4, 1/4)$, sarà più conveniente per il giocatore 1 giocare $(0, 1, 0)$ piuttosto che $(1/2, 1/4, 1/4)$: poiché il giocatore 2 gioca Sasso più spesso che Carta o Forbici, al giocatore 1 conviene giocare sempre Carta (questo può essere verificato formalmente calcolando l'utilità attesa del giocatore 1). Quindi $((1/2, 1/4, 1/4), (1/2, 1/4, 1/4))$ non è un ENM.

2.3.1 Trovare equilibri di Nash misti

Trovare ENM è considerevolmente più difficile che trovare equilibri in strategie dominanti o ENP, anche quando il gioco è finito e il numero di giocatori è costante, ed anche quando ci sono solo due giocatori. Apparentemente dovremmo verificare una condizione su un'insieme infinito di stati misti, per cui non è nemmeno ovvio come ciò possa essere fatto in tempo finito!

Fortunatamente le seguenti nozioni ci vengono in aiuto.

Definizione 2.9. Una strategia mista p_i è detta una *miglior risposta* alle strategie miste $p_1, \ldots, p_{i-1}$, $p_{i+1}, \ldots, p_n$ se per ogni strategia mista p'_i del giocatore i,

$$\sum_{s \in S} p_1(s_1) \ldots p_i(s_i) \ldots p_n(s_n) \cdot u_i(s) \geq \sum_{s \in S} p_1(s_1) \ldots p'_i(s_i) \ldots p_n(s_n) \cdot u_i(s).$$

Ovvero, una miglior risposta ottiene l'utilità attesa massima possibile tra tutte le strategie miste disponibili per il giocatore. Con questa definizione possiamo ora dire che *uno stato misto è un ENM se e solo se in esso ogni giocatore seleziona una miglior risposta alle strategie miste dei giocatori restanti.*

Definizione 2.10. Il *supporto* di una strategia mista p_i è l'insieme di tutte le strategie pure che hanno probabilità non nulla in p_i: $\mathrm{supp}(p_i) := \{j \in S_i : p_i(j) > 0\}$.

Esempio 2.11. Se $p_i = (\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ allora il supporto di p_i è $\{1, 4, 5\}$.

La seguente caratterizzazione è molto utile per il calcolo di equilibri di Nash misti.

Teorema 2.2. *Una strategia mista p_i è una miglior risposta se e solo se tutte le strategie pure in* $\mathrm{supp}(p_i)$ *sono miglior risposte.*

Dimostrazione. Se tutte le strategie pure in $\mathrm{supp}(p_i)$ sono miglior risposte, esse devono avere tutte la stessa utilità attesa. Poiché la strategia mista è una loro combinazione convessa, avrà la loro stessa utilità attesa e sarà quindi anch'essa una miglior risposta.

Viceversa, se la strategia mista p_i è una miglior risposta, tutte le strategie pure nel suo supporto sono miglior risposte: se così non fosse, diminuendo la probabilità legata alla strategia pura con l'utilità attesa *peggiore*, e aumentando nella stessa misura la probabilità della strategia pura con l'utilità attesa migliore, si potrebbe migliorare l'utilità attesa. Ma allora p_i non sarebbe una miglior risposta. □

In sostanza, la difficoltà nel trovare un ENM è quella di determinare i giusti supporti. Consideriamo il caso di un gioco a due giocatori *finito.* Esso può essere specificato attraverso due *matrici utilità* $A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ (motivo per cui questi giochi sono anche detti *bimatrix games*), dove $S_1 = \{1, \ldots, m_1\}$ e $S_2 = \{1, \ldots, m_2\}$ sono gli insiemi di strategie. Se conoscessimo i supporti $I \subseteq S_1$ e $J \subseteq S_2$ di un equilibrio di Nash, per verificare se esiste un ENM avente tali supporti sarebbe sufficiente verificare se il seguente sistema ha soluzione nelle variabili (vettoriali) x, y:

$$\sum_{j \in J} y_j a_{kj} \leq \sum_{j \in J} y_j a_{ij} \qquad \forall k \in S_1, \forall i \in I \tag{1}$$

$$\sum_{i \in I} x_i b_{ik} \leq \sum_{i \in I} x_i b_{ij} \qquad \forall k \in S_2, \forall j \in J \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I} x_i = 1 \tag{3}$$

$$\sum_{i \in J} y_j = 1 \tag{4}$$

$$x_i \geq 0 \qquad \forall i \in I \tag{5}$$

$$y_j \geq 0 \qquad \forall j \in J. \tag{6}$$

Le equazioni (1) dicono che ogni strategia pura nel supporto di x (che è I) è una miglior risposta alla strategia mista y: nessun'altra strategia pura k in S_1 può fornire un'utilità attesa migliore. Allo stesso modo, le equazioni (2) dicono che ogni strategia pura nel supporto di y (che è J) è una miglior risposta ad x. Le equazioni (3)–(6) forzano i vettori x ed y ad essere strategie miste con supporto I e J rispettivamente (cioè distribuzioni di probabilità su I ed J).

Teorema 2.3. *Esiste un algoritmo che calcola un ENM di un bimatrix game* (A, B) *dove* $A, B \in \mathbb{Q}^{m_1 \times m_2}$ *in tempo* $2^{m_1+m_2} \cdot \mathrm{poly}(\mathrm{bits}(A) + \mathrm{bits}(B))$.

Dimostrazione. Enumeriamo tutti i possibili supporti $I \subseteq S_1, J \subseteq S_2$ e per ognuno di essi verifichiamo se il sistema lineare visto sopra ha soluzione. Se sì, allora (x, y) è un ENM. □

Esempio 2.12. Torniamo al gioco della Corsa dei Polli.

u_1, u_2	sterza	dritto
sterza	0, 0	-1, 5
dritto	5, -1	-100, -100

Abbiamo visto che il gioco ha due equilibri di Nash puri: (sterza, dritto) e (dritto, sterza). Verifichiamo se ha un equilibrio (propriamente) misto. È facile vedere che in questo esempio, se il supporto di uno dei giocatori ha cardinalità uno, la miglior risposta dell'altro giocatore è un'unica strategia pura. Quindi, poiché abbiamo già indagato tutti gli ENP del gioco, qualunque altro ENM (se c'è) deve necessariamente avere un supporto di cardinalità due per *entrambi* i giocatori. Quindi non abbiamo bisogno di enumerare tutti i possibili supporti I e J: possiamo direttamente prendere $I = J = \{s, d\}$ dove s ed d sono abbreviazioni di "sterza" e "dritto" rispettivamente.

Il programma lineare è quindi:

$$\begin{aligned} y_s \cdot 0 + y_d \cdot (-1) &= y_s \cdot 5 + y_d \cdot (-100) \\ x_s \cdot 0 + x_d \cdot (-1) &= x_s \cdot 5 + x_d \cdot (-100) \\ y_d + y_s &= 1 \\ x_d + x_s &= 1 \\ x_d, x_s, y_d, y_s &\geq 0. \end{aligned}$$

La soluzione è $x_s = y_s = 99/104$, $x_d = y_d = 5/104$. Abbiamo così scoperto un ulteriore equilibrio. In questo equilibrio entrambi i giocatori sterzano con alta probabilità, ma ognuno di loro ha una piccola probabilità (5/104) di procedere dritto.

Esercizio 2.3. Trovare tutti gli ENM del seguente bimatrix game.

u_1, u_2	Azione 1	Azione 2
Azione 1	2, 1	0, 3
Azione 2	1, 2	4, 1

Osservazione 2.1. Non è attualmente noto se trovare un equilibrio di Nash di un gioco finito a due giocatori sia in generale un problema risolubile in tempo polinomiale, anche se alcuni recenti risultati di ricerca sembrano puntare in senso opposto. In ogni caso il problema non è NP-arduo: il problema di decisione associato, infatti, è banale in quanto la risposta è sempre "sì"!

2.3.2 Il caso dei giochi a somma zero

Nel caso particolare di giochi a due giocatori *a somma zero*, si dà il caso che esiste un algoritmo polinomiale per il calcolo di un equilibrio di Nash misto.

Consideriamo un tale gioco; esso può essere specificato da un'*unica* matrice $A = (a_{ij})_{ij}$, i cui elementi rappresentano simultaneamente le utilità per il primo giocatore (giocatore riga) e i costi per il secondo giocatore (giocatore colonna).

Assumiamo per un attimo che il giocatore colonna sappia che il giocatore riga giocherà la strategia mista x. Allora il giocatore colonna può calcolare il vettore delle utilità attese $x \cdot A$, e poiché vuole minimizzare la sua perdita, non può fare di meglio che giocare solo quelle strategie che corrispondono agli elementi minimi di questo vettore. Quindi, se guardiamo la cosa dal punto di vista opposto del giocatore riga, egli può assicurarsi un'utilità pari a v selezionando una strategia mista x tale che ogni componente del vettore $x \cdot A$ è almeno pari a v. Abbiamo quindi il seguente programma lineare per massimizzare il "livello di sicurezza" v:

$$\begin{aligned} v^* = &\max v \\ &\sum_{i \in S_1} x_i a_{ij} \geq v \qquad \forall j \in S_2 \\ &\sum_{i \in S_1} x_i = 1 \\ &x_i \geq 0 \qquad \forall i \in S_1. \end{aligned}$$

Allo stesso modo, per il giocatore colonna abbiamo il seguente programma lineare:

$$\begin{aligned} u^* = &\min u \\ &\sum_{j \in S_2} y_j a_{ij} \leq u \qquad \forall i \in S_1 \\ &\sum_{j \in S_2} y_j = 1 \\ &y_j \geq 0 \qquad \forall j \in S_2. \end{aligned}$$

Notiamo che questi programmi lineari sono *duali* l'uno dell'altro! Possiamo ora dimostrare il seguente teorema.

Teorema 2.4. *Le soluzioni ottime dei precedenti programmi lineari sono strategie miste che formano un equilibrio di Nash del gioco dato.*

Dimostrazione. Per il teorema della dualità lineare, $v^* = u^*$. Se i giocatori giocano la coppia di strategie (x, y), il giocatore riga non può aumentare la sua vincita, perché il giocatore colonna segue una strategia che gli garantisce di non perdere più di u^*. Allo stesso modo, il giocatore colonna non può diminuire la sua perdita sotto il valore v^*. Questo significa che la coppia di strategie (x, y) forma un equilibrio. $\square$

Corollario 2.5. *Esiste un algoritmo polinomiale per il calcolo di un equilibrio di Nash misto per giochi a due giocatori a somma zero.*

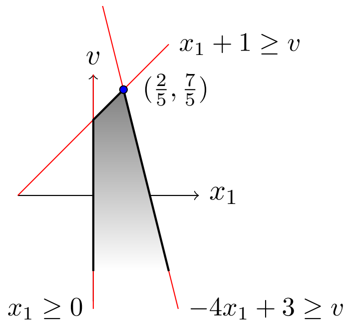

Figura 1: Esempio 2.13

In effetti, la quantità $v^* = u^*$ è detta il *valore* del gioco a somma zero: è il guadagno che il primo giocatore si può assicurare giocando il gioco al meglio delle sue possibilità. Notiamo che questo valore potrebbe benissimo essere negativo: in questo caso sarebbe meglio per il primo giocatore non giocare affatto!

Esempio 2.13. Consideriamo il seguente gioco a somma zero.

$u_1 = -u_2$	Azione 1	Azione 2
Azione 1	2	-1
Azione 2	1	3

Il primo programma lineare è:

$$\begin{aligned} &\max v \\ &x_1 \cdot 2 + x_2 \cdot 1 \geq v \\ &x_1 \cdot (-1) + x_2 \cdot 3 \geq v \\ &x_1 + x_2 = 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sostituendo $x_2 = 1 - x_1$, possiamo riscrivere le disuguaglianze principali come $x_1 + 1 \geq v$ e $-4x_1 + 3 \geq v$. Da queste troviamo (Figura 1) che il valore massimo di v è $7/5$, che si ottiene quando $x_1 = 2/5$, $x_2 = 3/5$. Analogamente, per il giocatore colonna, otteniamo $y_1 = 4/5$, $y_2 = 1/5$.

2.3.3 Giochi degeneri

Talvolta si può trovare un equilibrio di Nash "degenere". Consideriamo il gioco a somma zero dato dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Risolvendo il sistema che fornisce la strategia del secondo giocatore all'equilibrio otteniamo $y_1 = 1$, $y_2 = 0$. Però se scriviamo il programma lineare per il primo giocatore:

$$\begin{aligned}
&\max v \\
&2x_1 + 2x_2 \geq v \\
&4x_1 + 5x_2 \geq v \\
&x_1 + x_2 = 1 \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

vediamo che una qualunque distribuzione di probabilità (x_1, x_2) soddisfa il sistema (e che $v = 2$). Cosa significa? Il punto è che, poiché il secondo giocatore seleziona la prima colonna, non importa affatto quale riga venga selezionata dal primo giocatore. Ci sono quindi infiniti ENM, della forma $((\epsilon, 1-\epsilon), (1, 0))$ per ogni $\epsilon \in [0, 1]$.

2.3.4 Strategie dominate

Un altro concetto utile per lo studio degli equilibri è quello di *strategia dominata.*

Definizione 2.14. Un strategia pura s_i di un giocatore $i \in N$ è *strettamente dominata* da una strategia s_i' dello stesso giocatore se, per ogni combinazione s_{-i} delle strategie dei giocatori rimanenti,

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i', s_{-i}).$$

Quindi, una strategia strettamente dominata è una strategia rispetto alla quale c'è un'alternativa strettamente migliore per il giocatore, indipendentemente dalle azioni dei giocatori restanti. Per questo motivo, non è "razionale" giocare una strategia strettamente dominata e in effetti si può dimostrare facilmente che essa non può mai far parte di un equilibrio di Nash.

Per questo motivo, un utile passo di preprocessamento nell'analisi di un gioco consiste nell'eliminare da esso le strategie strettamente dominate. Per la proprietà di cui sopra, in tal modo non stiamo "intaccando" nessun equilibrio di Nash. Questa procedura può essere iterata finché nessuna strategia è strettamente dominata.

Esempio 2.15. Consideriamo il seguente bimatrix game (A, B):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Esaminando A, notiamo che nessuna strategia del giocatore riga è strettamente dominata. Esaminando B, vediamo che la terza colonna è strettamente dominata dalla prima. Possiamo così eliminare la terza colonna ed ottenere il seguente gioco, più semplice ma equivalente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

In questo nuovo gioco, la prima riga della matrice A è strettamente dominata dalla seconda riga. Quindi il giocatore 1 non giocherà mai la prima riga. Otteniamo il gioco ulteriormente semplificato:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Possiamo finalmente concludere che il giocatore 2 selezionerà la colonna che fornisce utilità 2. Abbiamo quindi raggiunto un equilibrio di Nash puro in cui entrambi i giocatori hanno utilità 2. Questo è anche un ENP del gioco originale, e da ciò che abbiamo detto deve anche esserne l'*unico* equilibrio di Nash (puro o misto), perché tutte le strategie che abbiamo scartato non possono far parte di un equilibrio.

La nozione di strategia strettamente dominata può essere indebolita permettendo l'uguaglianza, nel seguente modo.

Definizione 2.16. Una strategia pura s_i di un giocatore $i \in N$ è *debolmente dominata* da una strategia s_i' dello stesso giocatore se, per ogni combinazione s_{-i} delle strategie dei giocatori rimanenti,

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i', s_{-i}).$$

Diversamente dalle strategie strettamente dominate, *non* possiamo eliminare le strategie debolmente dominate senza il rischio di rimuovere qualche equilibrio di Nash. Infatti, se così facessimo nell'esempio di Sezione 2.3.3, ci ritroveremmo con un unico equilibrio puro (in cui il giocatore 1 gioca la seconda riga e il giocatore 2 la prima colonna), mentre abbiamo già visto che il gioco ha un numero infinito di equilibri di Nash.

2.3.5 Altri esempi di giochi

Esempio 2.17 (Asta)**.** Si vuole assegnare un oggetto ad un giocatore dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ in cambio di un pagamento in denaro. La valutazione del giocatore i dell'oggetto è v_i, e $v_1 > v_2 > \ldots > v_n > 0$. Il meccanismo usato per assegnare l'oggetto è un'asta a offerta segreta: i giocatori decidono simultaneamente le loro offerte (numeri non negativi), e l'oggetto viene assegnato al giocatore dall'identificativo più basso tra coloro che propongono l'offerta più alta, in cambio di un pagamento p. L'utilità del giocatore i è $v_i - p$ se egli ottiene l'oggetto, e 0 se non lo ottiene. L'entità del pagamento dipende dal tipo di asta.

In un'asta *del primo prezzo*, il pagamento effettuato dal vincitore è il prezzo che egli ha offerto.

Esercizio 2.4. Formulate un'asta del primo prezzo come un gioco strategico e analizzate i suoi equilibri di Nash puri. Mostrate che in tutti gli equilibri il giocatore 1 ottiene l'oggetto.

In un'asta *del secondo prezzo*, il pagamento effettuato dal vincitore è il valore più alto offerto tra tutti i giocatori, tranne quello che si aggiudica l'asta (così che, se solo un giocatore fa l'offerta più alta, il prezzo pagato è quello della *seconda* offerta più alta). È il caso di notare che un'asta del secondo prezzo molto simile a quella appena descritta viene usata sui siti di aste online quali eBay.

Esercizio 2.5. Mostrate che in un'asta del secondo prezzo un offerta pari a v_i per il giocatore i è un'azione debolmente dominante. Mostrate che ciononostante vi sono equilibri nei quali il vincitore non è il giocatore 1.

Esempio 2.18 (Acchiappare i voti)**.** Vi sono n persone, ognuna delle quali sceglie se divenire o no un candidato politico, e se sì, che posizione prendere. Vi è un continuum di cittadini, ognuno dei quali ha una posizione preferita; la distribuzione delle posizioni preferite è data da una funzione di densità. Un candidato attrae i voti di tutti quei cittadini le cui posizioni preferite sono più vicine a quella del candidato che a quelle di altri candidati; se k candidati scelgono la stessa posizione allora ciascuno riceve una frazione $1/k$ dei voti attratti da quella posizione. Il vincitore della competizione elettorale è il candidato che riceve più voti. Ogni persona preferisce essere l'unico candidato vincente piuttosto che pareggiare per il primo posto, preferisce pareggiare per il primo posto piuttosto che non candidarsi, e preferisce non candidarsi piuttosto che candidarsi e perdere.

Esercizio 2.6. Formulate questa situazione come un gioco strategico e trovate l'insieme degli equilibri di Nash puri quando $n = 2$.