Computational Game Theory

Vincenzo Bonifaci

21 aprile 2009

2 L'inefficienza degli equilibri

La tragedia dei pascoli comuni e il prezzo dell'anarchia. Abbiamo visto nelle lezioni precedenti come sia possibile modellare, tramite giochi e concetti di soluzione, i comportamenti che emergono in situazioni in cui più agenti razionali interagiscono. Cosa accade globalmente al sistema? Il concetto di *utilità sociale* può essere usato per misurare la qualità di un dato stato del gioco.

Definizione 2.1. L'*utilità sociale* di un gioco in uno stato $s \in S$ è la quantità $\sum_{i \in N} u_i(s)$.

Osservazione 2.1. Ci sono altre possibili definizioni di utilità sociale. Quella appena fornita potrebbe essere chiamata *utilitaristica* poiché fornisce lo stesso peso a tutti i giocatori.

In generale, l'utilità sociale derivante dal comportamento all'equilibrio non è la migliore possibile; i giocatori si troverebbero globalmente meglio con un coordinamento centralizzato. La domanda è: quanto peggiora, rispetto all'ottimo, l'utilità sociale all'equilibrio? La domanda è interessante poiché se sapessimo che gli equilibri di un dato gioco hanno utilità sociale dello stesso ordine di grandezza dell'utilità sociale ottima, si potrebbe ottenere un risultato vicino a quello ottimo senza necessità di costringere i giocatori a seguire azioni specificate (cosa spesso costosa o impossibile).

Consideriamo ad esempio il gioco della Condivisione di Banda. Abbiamo visto che il gioco ha un equilibrio di Nash puro in cui ognuno degli n giocatori usa una frazione $1/(n+1)$ della banda. L'utilità di ogni giocatore è dunque $1/(n+1)^2$, il che significa che l'utilità sociale all'equilibrio è $n/(n+1)^2 = \Theta(1/n)$. D'altra parte, se ogni giocatore usasse solo una frazione $1/(2n)$ della banda, l'utilità di ciascun giocatore sarebbe $1/(4n)$, così l'utilità sociale corrispondente sarebbe $1/4$. Notiamo che questa è $\Theta(n)$ volte maggiore dell'utilità sociale che si ha all'equilibrio. Quindi per l'egoismo degli utenti si paga un prezzo: un'utilità sociale sensibilmente diminuita. Questo fenomeno è ben noto in Economia, ed è stato chiamato *la tragedia dei pascoli comuni.*

Sebbene per alcuni giochi il prezzo dell'egoismo sia alto, questo non è necessariamente vero in generale. Per quantificare la diminuzione dell'utilità sociale, Koutsoupias e Papadimitriou hanno proposto il concetto di *prezzo dell'anarchia*, analogo alla nozione di rapporto di approssimazione nel caso dei problemi di ottimizzazione.

Definizione 2.2. Sia Γ un gioco in forma normale, con insieme degli stati S, e sia $E \subseteq S$ un insieme di equilibri tale che $E \neq \emptyset$. Il *prezzo dell'anarchia (price of anarchy)* di Γ (rispetto ad E) è la quantità

$$\frac{\max_{s \in S} \sum_{i \in N} u_i(s)}{\min_{s \in E} \sum_{i \in N} u_i(s)}.$$

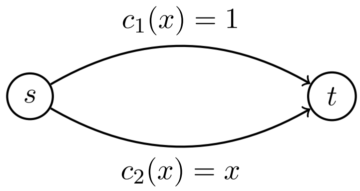

Figura 1: La rete di Pigou

Quando il gioco è definito in termini di costi $(c_i)_{i\in N}$, usiamo invece la definizione

$$\frac{\max_{s\in E}\sum_{i\in N} c_i(s)}{\min_{s\in S}\sum_{i\in N} c_i(s)}.$$

Quindi, con questa terminologia, il prezzo dell'anarchia del gioco di Condivisione di Banda (rispetto agli equilibri di Nash puri) è $\Theta(n)$. Notiamo dalla definizione che il prezzo dell'anarchia di un gioco è sempre almeno 1. Notiamo anche che se il gioco ammette più di un equilibrio, la definizione assume che si verifichi quello peggiore.

Esercizio 2.1 (Il gioco dell'inquinamento)**.** In questo gioco ci sono n paesi (i giocatori). Ogni paese decide se far passare una legge per il controllo dell'inquinamento oppure no. Una legge per il controllo dell'inquinamento ha costo 3 per il paese che la applica. Ogni paese senza una legge di controllo aggiunge un costo pari a 1 a *tutti* i paesi. Trovare il prezzo dell'anarchia del gioco.

3 Instradamento opportunistico (selfish routing)

Abbiamo visto che l'inefficienza degli equilibri può in generale essere alta e aumentare significativamente con la dimensione del sistema analizzato. Però è possibile identificare dei giochi per i quali gli equilibri sono sempre approssimativamente ottimi dal punto di vista dell'utilità sociale; ovvero, giochi con prezzo dell'anarchia limitato. Ci accingiamo a discutere un modello di giochi di rete in cui ciò accade (sotto opportune condizioni).

L'esempio di Pigou. Consideriamo la semplice rete mostrata in Figura 1. Due archi disgiunti collegano un nodo sorgente s ad un nodo di destinazione t. Ogni arco è etichettato con una *funzione costo* $c(\cdot)$ che descrive il costo (ad esempio, il tempo di viaggio) pagato dagli utenti dell'arco, come funzione dell'ammontare di traffico instradato sull'arco. Nell'esempio, l'arco superiore ha un costo costante $c_1(x) = 1$. Il costo dell'arco inferiore è $c_2(x) = x$ e quindi aumenta mano mano che l'arco diviene più congestionato. L'arco inferiore ha costo minore dell'arco superiore fintanto che l'arco inferiore è attraversato da una quantità di traffico minore di 1.

Immaginiamo che ci sia una quantità di traffico totale (da s a t) pari ad 1 (una "unità") nella rete, e che questo traffico sia controllato da una grande popolazione di giocatori, in cui ogni giocatore controlla un ammontare trascurabile (infinitesimo) di flusso. In effetti, questi giochi sono chiamati giochi di instradamento "non atomici" perché le decisioni di un singolo giocatore non hanno effetti percepibili sul gioco. Assumiamo che ogni giocatore minimizzi il proprio costo, che è dato dalla somma dei costi degli archi del percorso da lui selezionato. Possiamo allora vedere che selezionare l'arco inferiore è una strategia dominante per tutti i giocatori, cosicché nell'equilibrio in strategie dominanti risultante ogni giocatore ottiene un costo pari ad 1. Il costo sociale all'equilibrio è 1 (c'è un'unità di traffico, e ogni particella di traffico paga un costo pari ad 1). In effetti questo è anche l'unico equilibrio di Nash puro del gioco.

Qual è il costo sociale ottimo? Se mandiamo un ammontare x ($0 \leq x \leq 1$) sull'arco superiore, e $1-x$ sull'inferiore, otteniamo un costo pari a 1 per i giocatori che usano l'arco superiore, e un costo pari a $1-x$ per i giocatori che usano l'arco inferiore. Il costo sociale diviene quindi

$$C(x) = x \cdot 1 + (1-x) \cdot (1-x) = 1 - x + x^2.$$

Poiché $C(x) = 2x - 1$ e $C''(x) > 0$, il costo sociale è minimizzato quando $x = 1/2$, ovvero quando il traffico è equamente ripartito tra l'arco superiore e quello inferiore. In questo caso otteniamo un costo sociale pari a $3/4$. Quindi il prezzo dell'anarchia in questo gioco (rispetto agli equilibri di Nash puri) è pari a $4/3$.

Cosa accade al prezzo dell'anarchia in reti più complesse, ad esempio con un maggior numero di archi, o in cui ci sono più punti di origine e destinazione del traffico, o quando ci sono delle funzioni di latenza non-lineari? Questo è ciò che indagheremo nel seguito.

3.1 Il modello dell'instradamento opportunistico

Un gioco di instradamento opportunistico è specificato da una *rete* che consiste di un grafo diretto $G = (V, A)$ con insieme dei nodi V e insieme degli archi A, e da un insieme $\{(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)\}$ di coppie origine-destinazione (*commodities*). Ogni giocatore trasporta una quantità infinitesima di flusso associato ad una delle commodities. Denotiamo con $\mathcal{P}_i$ l'insieme dei percorsi da s_i a t_i nella rete. Definiamo anche $\mathcal{P} := \cup_{i=1}^k \mathcal{P}_i$. Il grafo può contenere archi "paralleli" tra la stessa coppia di nodi (come nell'esempio di Figura 1).

Uno stato del gioco è rappresentato da un *flusso*, ovvero una funzione $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}_+$. Se f è un flusso e $P \in \mathcal{P}_i$, denotiamo con f_P l'ammontare di traffico della commodity i che viaggia su un percorso da s_i a t_i. Il gioco specifica una *domanda* di traffico $r_i \geq 0$ per ognuna delle commodities. Un flusso è *ammissibile* rispetto ad un vettore domanda $r \in \mathbb{R}_+^k$ se, per ogni commodity i, $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = r_i$.

Ogni arco $a \in A$ ha una *funzione costo* associata $c_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Le funzioni costo sono non negative, continue e non decrescenti. Un *gioco di instradamento opportunistico non atomico* può quindi essere descritto da una tripla (G, r, c), dove G è un grafo, r è il vettore domanda di traffico e c è il vettore delle funzioni costo.

Qual è il costo subito dai giocatori? Se un giocatore si instrada attraverso un percorso P e lo stato globale del gioco è rappresentato dal flusso (ammissibile) f, allora il costo del giocatore è

$$c_P(f) := \sum_{a \in P} c_a(f_a)$$

dove $f_a := \sum_{P \in \mathcal{P} : a \in P} f_P$ indica l'ammontare totale di traffico sull'arco a.

Osservazione 3.1. Attenzione a non confondere le due notazioni f_P e f_a (P è un percorso, a è un arco). La prima denota il flusso che viaggia su un certo percorso P, senza considerare il flusso associato ad

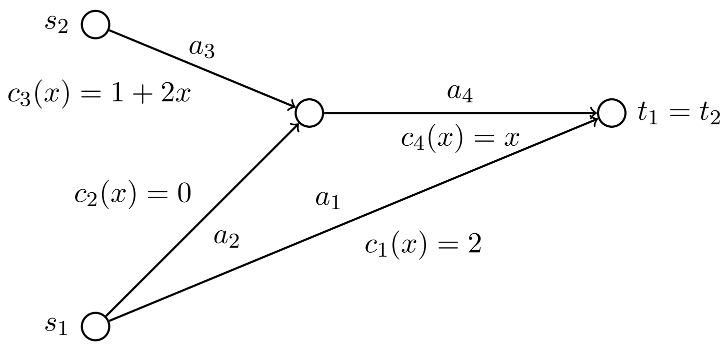

Figura 2: Una rete di esempio

altri percorsi, anche quando tali percorsi hanno archi in comune col percorso P. La quantità f_a fornisce invece l'ammontare totale di flusso che viaggia su un certo arco a. A scanso di equivoci useremo sempre lettere maiuscole per i percorsi e minuscole per gli archi.

Il costo sociale è misurato come segue: il costo di un flusso f è dato da

$$C(f) := \sum_{P \in \mathcal{P}} f_P c_P(f).$$

Equivalentemente (dimostratelo!), tale costo può essere espresso come somma su tutti gli archi:

$$C(f) = \sum_{a \in A} f_a c_a(f_a).$$

Esempio 3.1. Consideriamo la rete di Figura 2. Qui assumiamo due commodities ($k = 2$) con una domanda pari ad uno ciascuna (vettore domanda $r = (1, 1)$). Sorgente e destinazione sono (s_1, t_1) per la prima commodity e (s_2, t_2) per la seconda. Il grafo contiene due percorsi s_1–t_1 ($\mathcal{P}_1 = \{P_0, P_1\}$) e un percorso s_2–t_2 path ($\mathcal{P}_2 = \{P_2\}$). I percorsi sono i seguenti: $P_0 = \{a_1\}$, $P_1 = \{a_2, a_4\}$, $P_2 = \{a_3, a_4\}$. Infine, le funzioni costo sono $c_1(x) = 2$, $c_2(x) = 0$, $c_3(x) = 1 + 2x$, $c_4(x) = x$.

Un esempio di flusso ammissibile per la rete è il flusso f definito da $f_{P_0} = 1/2$, $f_{P_1} = 1/2$, $f_{P_2} = 1$. Notiamo che in questo caso $f_{a_1} = f_{P_0} = 1/2$, $f_{a_2} = f_{P_1} = 1/2$, $f_{a_3} = f_{P_2} = 1$, $f_{a_4} = f_{P_1} + f_{P_2} = 3/2$. Il costo di questo flusso è quindi $C(f) = (1/2) \cdot 2 + (1/2) \cdot 0 + 1 \cdot 3 + (3/2) \cdot (3/2) = 25/4$.

Possiamo ora definire un concetto di equilibrio per giochi di instradamento opportunistico non atomici.

Definizione 3.2. Sia f un flusso ammissibile per l'istanza (G, r, c). Il flusso f è un *flusso in equilibrio* se, per ogni commodity $i = 1, \ldots, k$ e per ogni coppia di percorsi $P, P' \in \mathcal{P}_i$,

$$\text{se } f_P > 0 \text{ allora } c_P(f) \leq c_{P'}(f).$$

Notiamo che una conseguenza della definizione è che in un flusso in equilibrio, per ogni $P \in \mathcal{P}_i$, tutti i flussi non nulli f_P da s_i a t_i hanno lo stesso costo, che dipende quindi da i ma non da P.

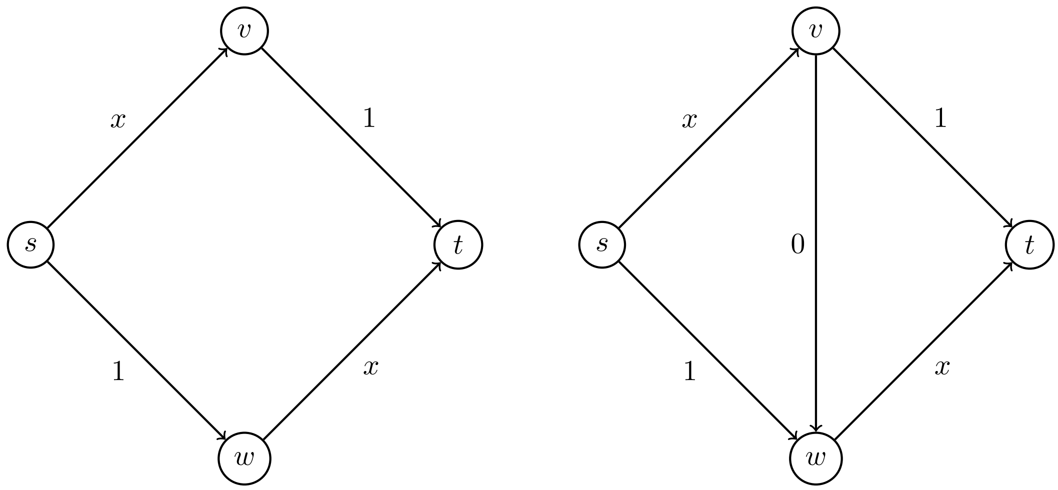

Figura 3: Il paradosso di Braess

Esempio 3.3. Nell'esempio di Pigou (Figura 1), il flusso che manda tutto il traffico sull'arco inferiore è un flusso in equilibrio.

Esempio 3.4. Consideriamo di nuovo l'Esempio 3.1. Il flusso f menzionato nell'esempio non è un flusso in equilibrio: consideriamo i percorsi P_0 e P_1. Abbiamo $f_{P_0} > 0$ mentre $c_{P_0}(f) = 2 > c_{P_1}(f) = 3/2$. Quindi i giocatori sul percorso P_0 hanno un incentivo a cambiare il loro percorso in P_1.

Invece, il flusso g definito da $g_{P_0} = 0$, $g_{P_1} = 1$, $g_{P_2} = 1$ è un flusso in equilibrio (verificate le disuguaglianze!).

Esempio 3.5 (Paradosso di Braess)**.** Il seguente esempio mostra che nei giochi di instradamento opportunistico si possono avere dei fenomeni controintuitivi. Consideriamo la rete nella parte sinistra di Figura 3. Ci sono due percorsi, ognuno con un costo combinato pari a $1 + x$ se x è il traffico instradato lungo il percorso. Assumiamo che vi sia una domanda unitaria di traffico da instradare. Allora nel flusso in equilibrio il traffico è diviso equamente tra i due percorsi (perché?) e il costo totale è 3/2.

Ora supponiamo che, al fine di diminuire il costo incontrato dal traffico, venga costruito un arco a costo zero che connetta i punti di mezzo dei percorsi esistenti, come sulla parte destra di Figura 3. Qual è il nuovo equilibrio? Esiste un nuovo percorso $s \to v \to w \to t$ e usare questo percorso è una strategia (debolmente) dominante per tutti gli utenti. Quindi, all'equilibrio, tutto il traffico è mandato lungo tale percorso. Il costo totale diviene quindi 2, maggiore di prima!

3.2 Esistenza di flussi in equilibrio

Il nostro scopo in questa sezione è di mostrare che un gioco di instradamento opportunistico ammette sempre un flusso in equilibrio. Faremo uso di una caratterizzazione dei flussi *ottimi*.

Definizione 3.6. Un *flusso ottimo* per l'istanza (G, r, c) è un flusso ammissibile f che minimizza $\sum_{a \in A} f_a c_a(f_a)$.

Per semplificare la discussione, assumiamo che per ogni arco a la funzione $x \cdot c_a(x)$ sia differenziabile e convessa. Ricordiamo che $x \cdot c_a(x)$ è il contributo al costo sociale del traffico sull'arco a (quando tale traffico è pari a x). Indichiamo con $c_a^*(x) := (x \cdot c_a(x))' = c_a(x) + xc_a'(x)$ la cosiddetta *funzione costo marginale* per l'arco a. Ad esempio, se $c_a(x) = x^3$ allora $c_a^*(x) = 4x^3$. Ricordiamo che con $c_P^*(f)$ intendiamo la quantità $\sum_{a \in P} c_a^*(f)$. È possibile dimostrare la seguente caratterizzazione (omettiamo la dimostrazione).

Proposizione 3.1. *Sotto le ipotesi di cui sopra, un flusso ammissibile f^* è un flusso ottimo per (G, r, c) se e solo se, per ogni commodity $i = 1, 2, \ldots, k$ ed ogni coppia di percorsi $P, P' \in \mathcal{P}_i$,*

$$\text{se } f_P^* > 0 \text{ allora } c_P^*(f^*) \leq c_{P'}^*(f^*).$$

C'è una forte somiglianza tra la condizione appena vista e quella della Definizione 3.2! In effetti, le due condizioni sono uguali se si eccettua il fatto che una è definita attraverso i costi originali c della rete, e l'altra attraverso i costi marginali c^*. Possiamo quindi dire che flussi ottimi e flussi all'equilibrio sono definiti nello "stesso" modo, ma rispetto a funzioni di costo diverse.

Corollario 3.2. *Un flusso ammissibile è un flusso ottimo per (G, r, c) se e solo se esso è un flusso all'equilibrio per (G, r, c^*).*

L'idea ora è la seguente: poiché i flussi ottimi esistono sempre (a prescindere da quale funzione globale si usi per definire il concetto di "ottimo"), mostreremo l'esistenza dei flussi in equilibrio vedendoli come flussi ottimi rispetto ad una definizione diversa di costo sociale. Ovvero, cerchiamo un'affermazione simile a quella del Corollario 3.2, ma nella direzione "inversa".

Sia $h_a(x) := \int_0^x c_a(y)dy$. Questa definizione è utile poiché $h_a'(x) = c_a(x)$. Diamo anche la seguente definizione.

Definizione 3.7. La funzione

$$\Phi(f) := \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} c_a(x)dx = \sum_{a \in A} h_a(f_a)$$

è chiamata la *funzione di potenziale* dell'istanza (G, r, c).

Possiamo ora invocare la Proposizione 3.1, eccetto che consideriamo la minimizzazione di $\Phi(\cdot)$ invece della minimizzazione di $C(\cdot)$; come dire che usiamo la funzione $h_a(x)$ al posto di $x \cdot c_a(x)$. Quindi ciò che prima era $c_a^*(x) = (x \cdot c_a(x))'$ è ora $h_a'(x) = c_a(x)$, e applicando la seconda parte della Proposizione 3.1 otteniamo che il flusso è all'equilibrio rispetto ai costi $(c_a)_{a \in A}$. Abbiamo dunque riformulato la Proposizione 3.1 come segue.

Proposizione 3.3. *Un flusso ammissibile è un flusso all'equilibrio per (G, r, c) se e solo se è un minimo globale della corrispondente funzione di potenziale Φ fornita nella Definizione 3.7.*

Armati di questa proposizione possiamo ora dimostrare il risultato di esistenza.

Teorema 3.4. *Sia (G, r, c) un'istanza di gioco di instradamento opportunistico. Allora*

1. *L'istanza (G, r, c) ammette almeno un flusso all'equilibrio.*

2. Se f e g sono flussi in equilibrio per (G, r, c) allora $c_a(f_a) = c_a(g_a)$ per ogni arco a.

Dimostrazione. Per costruzione, l'insieme dei flussi ammissibili è un sottoinsieme compatto (= chiuso e limitato) di $\mathbb{R}^{|\mathcal{P}|}$. Le funzioni di costo sugli archi sono continue, per cui anche la funzione di potenziale è continua. Per il Teorema di Weierstrass (ricordate?), Φ assume un minimo in questo insieme. Per la Proposizione 3.3, ognuno di questi minimi corrisponde ad un flusso in equilibrio di (G, r, c). Questo dimostra il punto (1).

La parte (2) può essere dimostrata usando il fatto che f e g minimizzano entrambe Φ e il fatto che Φ è convessa, e quindi deve avere lo stesso valore per f e per g. Inoltre Φ è una somma di termini convessi, per cui ogni termine $\int_0^x c_a(x)dx$ deve variare in maniera lineare tra f e g, il che implica che c_a ha lo stesso valore per f e per g. □

Esempio 3.8. Possiamo usare il Corollario 3.2 per trovare un flusso ottimo per la rete di Braess (parte destra di Figura 3). Se calcoliamo le funzioni di costo marginale, otteniamo $(x \cdot x)' = 2x$ per gli archi che avevano costo x, mentre gli archi con costo costante (0 e 1) rimangono inalterati (poiché, ad esempio, $(x \cdot 1)' = 1$). Se determiniamo un flusso in equilibrio per la rete con i costi modificati, otteniamo il flusso che manda mezza unità di traffico sul percorso superiore, mezza unità sul percorso inferiore, e zero unità sul percorso a zig-zag. Per il Corollario 3.2 questo flusso è il flusso ottimo per la rete con le funzioni di costo originali. Esso ha costo 3/2. D'altra parte, abbiamo visto nell'Esempio 3.5 che il flusso all'equilibrio ha costo 2. Quindi il prezzo dell'anarchia per la rete di Braess è pari a 4/3 (lo stesso prezzo dell'anarchia trovato nella rete di Pigou...).

4 Il prezzo dell'anarchia dell'instradamento opportunistico

4.1 Analisi tramite la funzione di potenziale

Avendo dimostrato che un flusso all'equilibrio esiste sempre, possiamo ora analizzare il prezzo dell'anarchia dell'instradamento opportunistico.

Iniziamo col mostrare che il tipo di funzioni di costo usate gioca un ruolo importante.

Esempio 4.1 (Pigou non lineare)**.** Consideriamo di nuovo la rete di Pigou, con la differenza che rimpiazziamo la funzione di costo lineare $c_2(x) = x$ con la funzione quadratica $c_2(x) = x^2$. È facile vedere che ancora una volta, il flusso all'equilibrio manda tutta la domanda di flusso (che è pari a 1) sull'arco inferiore, per un costo sociale pari a 1. Qual è il flusso ottimo? Se mandiamo un ammontare di traffico x $(0 \le x \le 1)$ sull'arco superiore, e $1 - x$ su quello inferiore, otteniamo un costo di 1 per i giocatori che usano l'arco superiore, e di $(1 - x)^2$ per i giocatori che usano l'arco inferiore. Il costo sociale è così

$$C(x) = x \cdot 1 + (1 - x) \cdot (1 - x)^2 = x + (1 - x)^3.$$

Poiché $C'(x) = 1 - 3(1 - x)^2$, il minimo si ha quando $(1 - x)^2 = 1/3$, ovvero quando $x = 1 - 1/\sqrt{3}$. Il costo in questo caso è $1 - (2/3)(1/\sqrt{3}) \simeq 0.615$. Quindi il prezzo dell'anarchia è $\simeq 1/0.615 \simeq 1.626$. Notiamo che questo valore è maggiore del 4/3 che era stato ottenuto con funzioni di costo lineari.

In effetti, generalizzando l'esempio a $c_2(x) = x^p$, otteniamo un prezzo dell'anarchia che cresce asintoticamente come $p/\ln p$. Quindi il prezzo dell'anarchia non è limitato se non limitiamo la classe di funzioni di costo.

Questo esempio mostra che se le funzioni di costo possono essere "altamente non lineari", il prezzo dell'anarchia può essere molto alto per reti molto semplici. Ma cosa accade se le funzioni di costo sono ad esempio lineari o quadratiche? Possiamo ottenere dei bound utili in questo caso?

Teorema 4.1. *Supponiamo che* $x \cdot c_a(x) \leq \gamma \cdot \int_0^x c_a(y)dy$ *per ogni* $a \in A$ *e* $x \geq 0$. *Allora il prezzo dell'anarchia di* (G, r, c) *è al più* γ.

Dimostrazione. Sia f un flusso all'equilibrio e sia f^* un flusso ottimo. Poiché le funzioni di costo sono non decrescenti, il costo di un flusso è sempre almeno pari al valore di potenziale dello stesso flusso (perché?), e in particolare $C(f^*) \geq \Phi(f^*)$. Per l'ipotesi, il costo di qualunque flusso è al più γ volte il valore del potenziale del flusso. Possiamo concludere, usando la Proposizione 3.3,

$$C(f) \leq \gamma \cdot \Phi(f) \leq \gamma \cdot \Phi(f^*) \leq \gamma \cdot C(f^*).$$

□

Corollario 4.2. *Il prezzo dell'anarchia in instanze con funzioni di costo che sono polinomi di grado al più* p *è al più pari a* $p + 1$.

Dimostrazione. Sia c_a una tale funzione costo. Allora per ogni $y \geq 0$

$$y \cdot c_a'(y) \leq p \cdot c_a(y)$$

quindi

$$c_a(y) + y \cdot c_a'(y) \leq (p + 1) \cdot c_a(y).$$

Integrando ambo i lati tra 0 ed x otteniamo

$$x \cdot c_a(x) = \int_0^x (y \cdot c_a(y))' dy \leq (p + 1) \int_0^x c_a(y)dy$$

per ogni $x \geq 0$. Ora il risultato segue dal Teorema 4.1. □

4.2 Pseudo-approssimazione per funzioni di costo generali

Come abbiamo visto, per funzioni di costo qualunque non è possibile dare un bound costante sul prezzo dell'anarchia, neanche per reti molto semplici. Però si può dimostrare il seguente risultato (omettiamo la dimostrazione).

Teorema 4.3. *Se* f *è un flusso all'equilibrio per* (G, r, c) *e* f^* *è un flusso ottimo per* $(G, 2r, c)$*, allora* $C(f) \leq C(f^*)$.

Vale a dire, il flusso all'equilibrio ha un costo minore o uguale a quello del flusso ottimo per un'istanza modificata *in cui la domanda di traffico è raddoppiata.* Intuitivamente, questo significa che l'inefficienza dovuta all'instradamento opportunistico può essere "neutralizzata" utilizzando archi che hanno una "capacità" doppia rispetto a quelli originali.