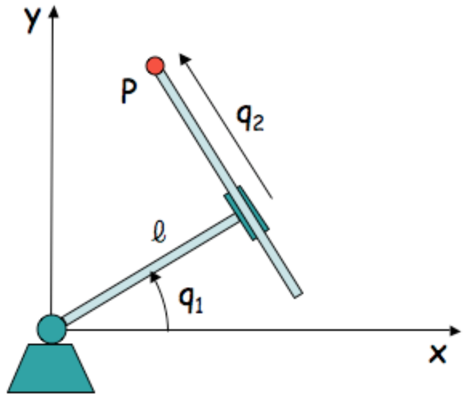
Prova Scritta di Robotica I

10 Luglio 2009

Esercizio 1



Si consideri il robot planare RP in figura, dove ℓ è la lunghezza del primo braccio e sono indicate le coordinate generalizzate da utilizzare. Sia $\boldsymbol{p} = (p_x \; p_y)^T$ la posizione dell'organo terminale P.

- Risolvere il problema cinematico inverso del robot, fornendo il numero e la tipologia delle soluzioni al variare della posizione di P.
- Disegnare lo spazio di lavoro primario e fornirne le dimensioni, nel caso in cui le variabili di giunto siano limitate come segue: $q_1 \in [-\pi/2, +\pi/2]$, $q_2 \in [-L, +L]$. Discutere la presenza di singolarità sulla frontiera di tale spazio di lavoro.

Esercizio 2

Siano date una posa iniziale A e una finale B nello spazio di lavoro di un robot, con terne associate rappresentate dalle matrici di trasformazione omogenea:

$$
{}^0\boldsymbol{T}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad {}^0\boldsymbol{T}_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

- Pianificare una traiettoria di moto *coordinato* dalla posa A alla posa B su un cammino rettilineo da O_A ad O_B, in un tempo $T = 2$ sec, e con velocità lineare e angolare nulla nell'istante iniziale e finale.
- Fornire il valore numerico nell'istante $t = T/2$ della velocità lineare (dell'origine della terna di moto) e della velocità angolare.

[120 minuti di tempo; libri aperti]

Soluzioni

10 Luglio 2009

Esercizio 1

La cinematica diretta del robot è

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \cos q_1 - q_2 \sin q_1 \\ \ell \sin q_1 + q_2 \cos q_1 \end{pmatrix}.$$

Riscrivendola nella forma

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}(q_1) \begin{pmatrix} \ell \\ q_2 \end{pmatrix},$$

dove $\boldsymbol{R}(\theta)$ è la matrice 2×2 di rotazione planare di un angolo θ, ne segue immediatamente che

$$\boldsymbol{p}^T \boldsymbol{p} = p_x^2 + p_y^2 = \begin{pmatrix} \ell & q_2 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{R}^T(q_1)\boldsymbol{R}(q_1) \begin{pmatrix} \ell \\ q_2 \end{pmatrix} = \ell^2 + q_2^2,$$

da cui

$$q_2 = \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - \ell^2}.$$

A seconda che $\|\boldsymbol{p}\|$ sia maggiore, uguale o minore di ℓ, si avranno rispettivamente due soluzioni cinematiche inverse, una soluzione (singolare) o nessuna soluzione. Si noti che non si considerano in tale analisi eventuali fondo corsa per i giunti (in particolare per quello prismatico).

Determinato q_2, per ricavare la prima variabile, si può riscrivere la cinematica diretta come

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_2 & \ell \\ \ell & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin q_1 \\ \cos q_1 \end{pmatrix},$$

in cui la matrice che compare è sempre non singolare (con determinante pari a $-(q_2^2 + \ell^2) < 0$). Risolvendo, si ha

$$\begin{pmatrix} \sin q_1 \\ \cos q_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_2^2 + \ell^2} \begin{pmatrix} \ell p_y - q_2 p_x \\ \ell p_x + q_2 p_y \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$q_1 = \text{ATAN2}\{\ell p_y - q_2 p_x, \ell p_x + q_2 p_y\},$$

dove occorre sostituire, nel caso regolare, le due soluzioni trovate per q_2. Nel caso singolare, si ha un'unica soluzione $q_2 = 0$ e quindi l'unico valore associato $q_1 = \text{ATAN2}\{p_y, p_x\}$.

Lo spazio di lavoro del robot è mostrato nella Figura 1, dove si riporta a sinistra il caso in cui solo la variabile prismatica è limitata ($|q_2| \leq L$) e a destra la situazione completa richiesta. I raggi delle due circonferenze concentriche sono $r = \ell$ e $R = \sqrt{\ell^2 + L^2}$. Si noti che sulla frontiera esterna dello spazio di lavoro (arco di circonferenza di raggio R), come pure sui due tratti rettilinei della frontiera, lo Jacobiano analitico 2×2 del robot non è singolare in quanto tali limiti sono imposti dai fondo corsa dei giunti e non dalla configurazione cinematica del robot stesso. In altre parole, sui tratti di frontiera dove non si ha singolarità lo spazio delle velocità cartesiane ammissibili è ancora bidimensionale, essendo in alcune direzioni limitato solo il verso della velocità.

Nella Figura 2 si riporta infine la partizione dello spazio di lavoro in termini di numero di soluzioni cinematiche inverse in presenza dei limiti di giunto considerati. In particolare le soluzioni

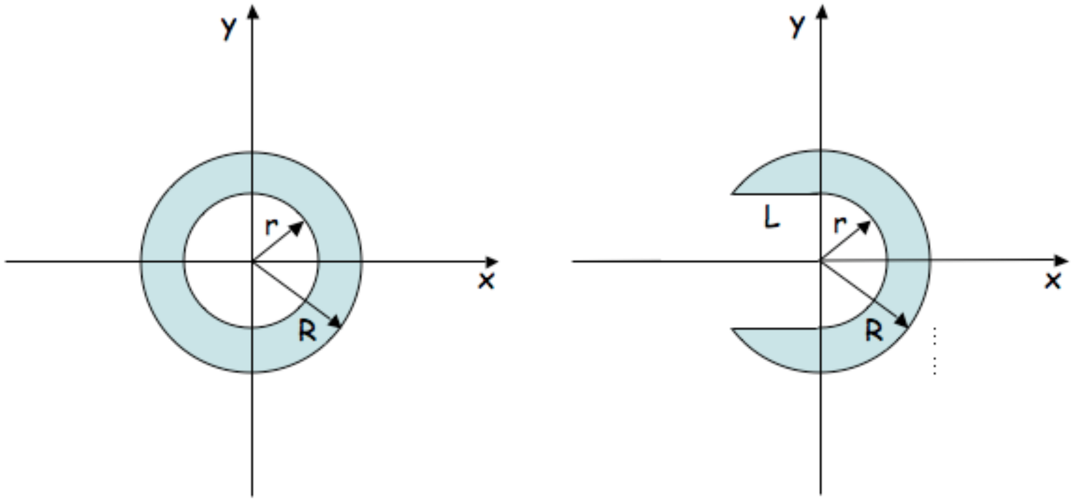


Figura 1: Spazio di lavoro, dove $r = \ell$, $R = \sqrt{\ell^2 + L^2}$; a sinistra il caso con solo $|q_2| \leq L$; a destra il caso completo, anche con $|q_1| \leq \pi/2$

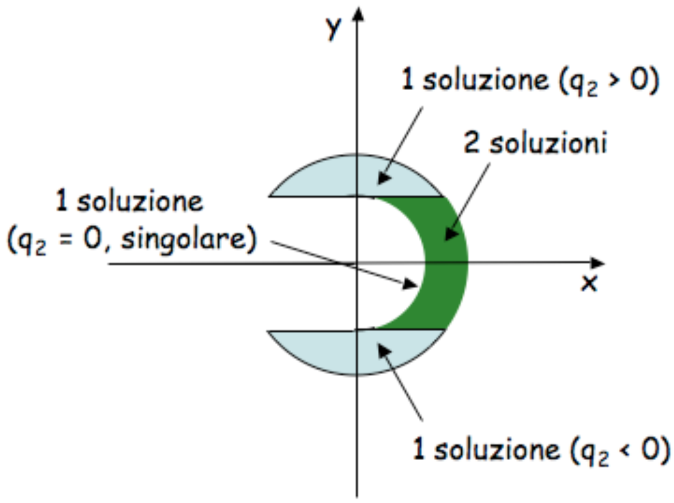


Figura 2: Numero di soluzioni nello spazio di lavoro con i limiti di giunto

sono due nella zona riportata in verde scuro, compresi i tratti rettilinei e il tratto di circonferenza esterna che fanno parte della frontiera di tale zona (nel tratto di circonferenza interna la soluzione è invece unica e singolare).

Esercizio 2

Essendo la distanza tra le origini O_A e O_B delle terne associate alla posa iniziale e finale pari a

$$L = \left\| {}^0\boldsymbol{p}_{0B} - {}^0\boldsymbol{p}_{0A} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -0.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1.5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3.25},$$

il cammino lineare per l'origine della terna associate al moto si può parametrizzare come

$$\boldsymbol{p}(s) = {}^0\boldsymbol{p}_{0A} + \frac{s}{L}\left({}^0\boldsymbol{p}_{0B} - {}^0\boldsymbol{p}_{0A}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{s}{\sqrt{3.25}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, L].$$

La rotazione relativa tra la posa A e quella B è data da

$${}^A\boldsymbol{R}_B = {}^0\boldsymbol{R}_A^T \, {}^0\boldsymbol{R}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da questa è possibile pianificare il moto in orientamento con il metodo asse/angolo. Occorre determinare il versore ${}^A\boldsymbol{r}$ (definito rispetto alla terna di partenza) e l'angolo θ_{AB} che soddisfano la $\boldsymbol{R}({}^A\boldsymbol{r}, \theta_{AB}) = {}^A\boldsymbol{R}_B$. Indicati con r_{ij} gli elementi della matrice di rotazione ${}^A\boldsymbol{R}_B$, dalle formule inverse del metodo asse/angolo si ha

$$\begin{aligned} \theta_{AB} &= \text{ATAN2}\{+\sqrt{(r_{21} - r_{12})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{23} - r_{32})^2}, r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1\} \\ &= \text{ATAN2}\{\sqrt{3}, -1\} = \frac{2}{3}\pi = 2.0944 \text{ rad } (= 120°) \end{aligned}$$

e

$${}^A\boldsymbol{r} = \frac{1}{2\sin\theta_{AB}} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.5774 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{con } \|{}^A\boldsymbol{r}\| = 1).$$

Si noti che si è utilizzata solo una delle due soluzioni inverse possibili. Il cammino per l'orientamento è parametrizzabile (ancora linearmente) mediante la

$$\theta(s) = \frac{s}{L}\,\theta_{AB}, \qquad s \in [0, L].$$

L'orientamento in corrispondenza ad un dato valore del parametro s sarà quindi

$$\boldsymbol{R}(s) = {}^0\boldsymbol{R}_A \, \boldsymbol{R}({}^A\boldsymbol{r}, \theta(s)).$$

Avendo utilizzato lo stesso parametro s per la posizione e l'orientamento, pianificare una singola legge oraria $s = s(t)$, con $t \in [0, T]$, porterà automaticamente ad un moto coordinato: la traslazione e la rotazione tra posa iniziale e finale verranno completate in modo simultaneo.

Per la legge oraria, la soluzione più semplice è quella di utilizzare un polinomio cubico (bi-normalizzato) con derivate nulle per $t = 0$ e $t = T$. Si ha allora

$$s(t) = L\left[-2\left(\frac{t}{T}\right)^3 + 3\left(\frac{t}{T}\right)^2\right], \qquad t \in [0, T].$$

La derivata temporale sarà allora

$$\dot{s}(t) = \frac{6L}{T}\left[\left(\frac{t}{T}\right) - \left(\frac{t}{T}\right)^2\right],$$

da cui

$$\dot{s}(T/2) = \frac{3L}{2T}.$$

La velocità lineare e quella angolare durante il moto sono

$${}^0\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \frac{d\boldsymbol{p}}{ds}\dot{s}(t) = \frac{\dot{s}(t)}{L}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

e

$${}^A\boldsymbol{\omega}(t) = {}^A\boldsymbol{r}\,\frac{d\theta(s)}{ds}\,\dot{s}(t) = \frac{\dot{s}(t)}{L}\,\theta_{AB}\,{}^A\boldsymbol{r}.$$

Da queste, in $t = T/2 = 1$ sec, si ha:

$${}^0\dot{\boldsymbol{p}}(1) = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \qquad {}^A\boldsymbol{\omega}(1) = \frac{3}{2}\cdot 2.0944 \cdot 0.5774\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.8138\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ rad/sec},$$

e quindi

$${}^0\boldsymbol{\omega}(1) = {}^0\boldsymbol{R}_A\,{}^A\boldsymbol{\omega}(1) = 1.8138\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ rad/sec}.$$

* * * * *