NOTA: I seguenti esercizi proposti hanno un livello di difficoltà crescente, partendo dalle problematiche iniziali che uno studente ancora inesperto nell'uso di AMPL può incontrare. Di ciò si tenga conto quando si considerano i quesiti al termine di ogni esercizio.

Esercizio 1

Si consideri il seguente problema di ottimizzazione. Una gelateria artigianale produce 4 gusti di gelato alla frutta (G1,G2,G3,G4) ottenuti amalgamando alcuni ingredienti di base quali Fragole, Limoni, Zucchero, Uova, Farina, Latte e molti altri. La tabella che segue riporta per ogni Kg di ciascun gusto di gelato prodotto (Gi), il contenuto di quegli ingredienti di base disponibili in quantità limitate, nonchè il prezzo di vendita (Euro/Kg) al pubblico.

	G1	G2	G3	G4	
Fragole	0.3	0	0.5	0	Kg/Kg
Limoni	0	0.2	0	0.4	Kg/Kg
Latte	0.4	0.4	0.25	0.4	lt/Kg
Zucchero	0.2	0.1	0.18	0	Kg/Kg
Prezzo	11	12	14	13	euro/Kg

Sapendo che la gelateria può disporre solo di 5Kg di Fragole, 3Kg di Limoni, 10lt di Latte, 4Kg di Zucchero e che tutto il gelato prodotto verrà effettivamente venduto, stabilire le quantità dei 4 gusti di gelato da produrre, in modo da massimizzare i ricavi.

- Formulare un modello di programmazione matematica per il precedente problema.
- Scrivere nella sintassi di `AMPL` il problema precedentemente formulato separando il modello (file `.mod`) dai dati (file `.dat`).
- Modificare i due file di cui al punto precedente in modo tale da utilizzare un insieme (`set`) di elementi, per es. `set INGRE`.
- Modificare i due file di cui sopra in modo tale da utilizzare due insiemi di elementi.
- Se modifichino i due file di cui sopra in modo da usare il parametro bidimensionale `composiz` definito come segue:

```
param composiz: G1    G2    G3    G4 :=
      Fragole   0.3   0     0.5   0
      Limoni    0     0.2   0     0.4
      Latte     0.4   0.4   0.25  0.4
      Zucchero  0.2   0.1   0.18  0    ;
```

- qualora il modello di PL risulti inammissibile (oppure illimitato), modificare opportunamente i parametri e ricercare una soluzione ottima ammissibile.

Esercizio 2

Un'azienda produttrice di pneumatici speciali è in grado di realizzare 2 differenti prodotti: in nylon ed in fibra di vetro. L'azienda deve rispettare un piano di consegna degli pneumatici, per i prossimi 3 mesi, indicato nella seguente tabella:

Consegna	Nylon	Fibra di vetro
30/04/03	4000	1000
31/05/03	8000	5000
30/06/03	3000	5000
Totale	15000	11000

Per produrre tali pneumatici l'azienda utilizza 2 diverse presse, indicate con **A** e **B**, che sono in grado di stampare pneumatici di entrambi i tipi. I tempi (espressi in ore) in cui ciascuna delle presse è disponibile, sono indicati per ogni mese nella seguente tabella:

	A	**B**
Aprile	700	1500
Maggio	3000	4000
Giugno	1000	300

Per la lavorazione di ognuno degli pneumatici è necessario un tempo di fabbricazione espresso dal seguente prospetto (ore):

	A	**B**
Nylon	0.15	0.16
Fibra di vetro	0.12	0.14

Il costo variabile di produzione per ciascuno pneumatico è pari a 5000 Euro per ogni ora di produzione, indipendentemente dal tipo di pressa o di pneumatico. Il costo di giacenza in magazzino è di 100 Euro per pneumatico al mese. Il costo delle materie prime è pari a 3100 Euro e 3900 Euro per pneumatico, rispettivamente, per nylon e fibra di vetro. I costi di finitura, imballaggio e spedizione, sono pari a 230 Euro per pneumatico. I prezzi di vendita sono di 7000 Euro e 9000 Euro rispettivamente, per i due tipi di pneumatici. Formulare dapprima un modello di PL che sulla base dei soli dati forniti consenta di determinare il piano di produzione dell'azienda al fine di conseguire la massimizzazione dei profitti.

- Formulare un modello di programmazione matematica per il precedente problema, il quale tenga conto della possibilità di immagazzinare pneumatici.
- Scrivere nella sintassi di `AMPL` il problema precedentemente formulato separando il modello (file `.mod`) dai dati (file `.dat`).
- Si interpretino i risultati ottenuti, relativamente alla gestione delle scorte. In particolare si modifichi il modello in modo tale che sia prevista una medesima scorta iniziale e finale ($s_{iniz} = s_{finale}$ scelta a piacere in maniera tale che il problema risulti ammissibile) per entrambi i tipi di pneumatici.
- Qualora il modello di PL risulti inammissibile (oppure illimitato), modificare opportunamente i parametri e ricercare una soluzione ottima ammissibile.

Esercizio 3

Un'impresa dispone di impianti di produzione a Seattle e San Diego negli Stati Uniti, dove è in grado di produrre rispettivamente 350 e 600 esemplari ($prod_i \quad i = 1, 2$) di frigoriferi alla settimana. Questi vanno trasportati nei 3 centri di smistamento a New York, Chicago e Topeka, che richiedono settimanalmente 320, 300 e 270 frigoriferi. Il costo di trasporto dei frigoriferi è legato alla distanza percorsa dalla fabbrica al centro di smistamento, essendo di \$90 per ogni frigorifero e per ogni 1000 miglia percorse. Il prospetto delle distanze (miglia) è il seguente ($d_{ij} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3$):

	New York	Chicago	Topeka
Seattle	2500	1700	1800
San Diego	2500	1800	1400

Infine si consideri che ciascun centro di smistamento è in grado di modificare parzialmente le preferenze dei negozianti che rifornisce; pertanto, pur essendo costante e pari a 890 il numero totale dei frigoriferi prodotti in totale a Seattle e San Diego, ciascun centro di smistamento è libero di modificare per non più del 10% la propria richiesta di frigoriferi agli impianti (per es. New York richiede almeno 288 frigoriferi - ric_90_1 - ed al più 352 - ric_110_1 -).

- si costruisca un modello di PL relativo al problema descritto, con l'obiettivo di minimizzare i costi totali di trasporto;
- si costruiscano separatamente i file `.mod` e `.dat` nella sintassi del modellatore-solutore AMPL e si risolva il problema;
- si consideri la soluzione del problema nel caso in cui non sia possibile convertire fino al 10% della domanda dei frigoriferi;
- si consideri la soluzione del problema qualora siano presenti anche vincoli sulla capacità di trasporto degli automezzi utilizzati. In particolare si supponga che da ogni fabbrica ad ogni centro di smistamento non possano essere consegnati più di 250 frigoriferi.

FORMULAZIONE

$x_{ij} \quad = \quad$ numero di frigoriferi trasportati dall'impianto $i-$simo al centro $j-$simo

$$
\begin{aligned}
\min\ & 90 \cdot 10^{-3} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} d_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.}\quad & ric\_90_j \leq \sum_{i=1}^{2} x_{ij} \leq ric\_110_j \qquad j = 1, 2, 3 \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} = 890 \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{3} x_{ij} \leq prod_i \qquad i = 1, 2 \\
\text{s.t.}\quad & 0 \leq x_{ij} \leq 250 \qquad i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

Un'industria di soft-drinks intende produrre una nuova bevanda nella quale deve essere contenuto zucchero di canna, zucchero di barbabietola e zucchero di acero. Per esigenze di mercato i fornitori rendono disponibili le miscele A $\cdots$ G dei tre zuccheri, il cui contenuto percentuale di ciascuno zucchero è dato dal seguente prospetto ($perc_{ij} \quad i = 1,2,3 \quad j = A,\ldots,G$):

	A	B	C	D	E	F	G
canna	10	10	20	30	40	20	60
barbabietola	30	40	40	20	60	70	10
acero	60	50	40	50	0	10	30

Il costo (in dollari) di ciascuna miscela ($costo_j \quad j = A,\ldots,G$) è dato da :

	A	B	C	D	E	F	G
costo	10	11	12	13	14	12	15

inoltre per ciascuna miscela non è possibile utilizzare un quantitativo maggiore di quello riportato nella seguente tabella

	A	B	C	D	E	F	G
max	55	60	55	53	60	61	59

- si formuli un modello di PL (FORMULAZIONE I) che minimizzi i costi totali per produrre un mix delle miscele A $\cdots$ G, tale che questa contenga le seguenti quantità di zuccheri dei 3 tipi ($ton_i \quad i = 1,2,3$): 52 tonnellate di zucchero di canna, 56 tonnellate di zucchero da barbabietola e 59 tonnellate di zucchero di acero;

- si costruiscano separatamente i file `.mod` e `.dat` nella sintassi del modellatore-solutore AMPL; si risolva il problema;

- si formuli un modello alternativo (FORMULAZIONE II) nel quale l'obiettivo è quello di produrre una tonnellata di mix, al costo minimo, in maniera tale che la percentuale dei 3 tipi di zucchero sia compresa tra il 30% ed il 37%.

FORMULAZIONE I

$$y_j \quad = \quad \text{quantità di miscela } j\text{−sima acquistata} \qquad j = A,\ldots,G$$

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{j=A}^{G} costo_j y_j \\
&\text{s.t.} \quad \frac{1}{100}\sum_{j=A}^{G} perc_{ij} \cdot y_j = ton_i \qquad i = 1,2,3 \\
&\text{s.t.} \quad y_j \leq max_j \qquad j = A,\ldots,G \\
&\text{s.t.} \quad y_j \geq 0 \qquad j = A,\ldots,G
\end{aligned}$$

FORMULAZIONE II

$$
\begin{aligned}
\min \sum_{j=A}^{G} costo_j y_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=A}^{G} y_j = 1 \\
\text{s.t.} \quad & 0.3 \leq \sum_{j=A}^{G} perc_{ij} \cdot y_j \leq 0.37 \quad i = 1, 2, 3 \\
\text{s.t.} \quad & y_j \geq 0 \quad j = A, \ldots, G
\end{aligned}
$$

Esercizio 5

Una catena di ristoranti fast food ha esercizi aperti 7 giorni a settimana e richiede il seguente numero minimo di addetti alla cucina per ogni giorno della settimana:

	lun	mar	mer	gio	ven	sab	dom
addetti	12	11	10	13	12	14	13

Ciascun addetto deve lavorare un solo giorno durante il week-end (i.e. il sabato o la domenica) più altri 4 giorni infrasettimanali. Si vuole calcolare sulla base delle informazioni fornite il numero minimo di addetti che è necessario assumere su base settimanale affinchè siano verificate tutte le specifiche.

- Si costruiscano separatamente i file `.mod` e `.dat`, nella sintassi del modellatore-solutore AMPL, nei quali si tenga conto dell'ordinamento dei giorni della settimana; si risolva il problema;
- per la soluzione del problema si consideri che il numero massimo di addetti che l'impresa può assumere è di 35 unità.

FORMULAZIONE I

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ se l'impiegato } i-\text{simo lavora} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se l'impiegato } i-\text{simo lavora nel giorno } j-\text{simo} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\min \sum_{i=1}^{35} x_i & \\
\text{s.t.} \quad & y_{i\ sab} + y_{i\ dom} \leq x_i \quad i = 1, \ldots, 35 \\
\text{s.t.} \quad & y_{i\ sab} \leq (1 - y_{i\ dom}) \quad i = 1, \ldots, 35 \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=lun}^{ven} y_{ij} \leq 4 \cdot (y_{i\ sab} + y_{i\ dom}) \quad i = 1, \ldots, 35 \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=lun}^{dom} y_{ij} \leq 5x_i \quad i = 1, \ldots, 35 \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{35} y_{ij} \geq addetti_j \quad j = lun, \ldots, dom
\end{aligned}$$

Si verifichi se il penultimo insieme di vincoli è strettamente necessario o può essere omesso. Si osservi che la precedente formulazione presenta l'inconveniente di richiedere la conoscenza di un numero massimo di impiegati da assumere (35). Per evitare questo si può ricorrere alla seguente formulazione alternativa.

FORMULAZIONE II

Poichè ciascun impiegato assunto deve lavorare in uno ed uno soltanto tra i giorni di sabato e domenica, introduciamo un insieme di *pattern* $\mathcal{P}$ come insieme delle 10 coppie ($pat_i \quad i = 1, \ldots, 10$) di giorni

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} = \{ & (lun, sab), (lun, dom), (mar, sab), (mar, dom), (mer, sab), \\
& (mer, dom), (gio, sab), (gio, dom), (ven, sab), (ven, dom) \ \}
\end{aligned}$$

In sostanza ciascun pattern vuole rappresentare una coppia di giorni dei quali il primo risulta essere *sabato* oppure *domenica*. A questo punto è possibile introdurre la seguente formulazione, più sintetica della precedente:

$$
\begin{array}{rcl}
x_i & = & \text{numero di impiegati che lavorano secondo il pattern } i\text{-simo} \\
 & & \text{(ovvero NON lavorano nei soli due giorni indicati dal pattern)}
\end{array}
$$

$$
\min \sum_{i \in \mathcal{P}} x_i
$$

$$
\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{i \in \mathcal{P} \\ i \neq pat_j \\ i \neq pat_{j+1}}} x_i \geq addetti_j \qquad j = lun, \ldots, ven
$$

Esercizio 6

Un'industria produce una particolare qualità di olio, attraverso un processo di raffinazione e miscelazione di olii più grezzi. Vengono usati per la produzione 2 olii grezzi vegetali e 3 olii grezzi non-vegetali; tali olii possono essere acquistati sul libero mercato e stockati dall'industria, tenendo conto della seguente tabella di costi ($costo_{ij}$ in \$/tonnellata):

	veg1	veg2	oil1	oil2	oil3
gennaio	110	120	130	110	115
febbraio	130	130	110	90	115
marzo	110	140	130	100	95
aprile	120	110	120	120	125
maggio	100	120	150	110	105
giugno	90	100	140	80	135

Tutto l'olio prodotto viene venduto al prezzo di 150 \$/tonnellata (*prezzo*). Poichè gli olii vegetali seguono differenti processi di lavorazione rispetto a quelli non-vegetali, non è possibile acquistare mensilmente più di 200 tonnellate di olii vegetali e 250 tonnellate di quelli non-vegetali (si assumano trascurabili le perdite dovute alle fasi di lavorazione).
È possibile immagazzinare al più 1000 tonnellate di ciascun olio grezzo (considerare le scorte all'inizio del mese) al costo di stockaggio di 5 \$/tonnellata ogni mese (non è possibile stockare l'olio prodotto). A ciascun olio grezzo è associata una acidità data dalla seguente tabella ($acidita_j$):

	acidità
veg1	8.8
veg2	6.1
oil1	2.0
oil2	4.2
oil3	5.0

mentre l'olio prodotto deve avere un'acidità compresa tra 3 e 6.

- si costruisca un modello di PL del problema descritto;
- si definiscano separatamente i file `.mod` e `.dat` nella sintassi del modellatore-solutore AMPL; si risolva il problema;
- si osservi l'andamento della soluzione assumendo un livello iniziale e finale delle scorte pari a 500 tonnellate per ogni olio grezzo e diminuire progressivamente tale valore.

FORMULAZIONE

$$\begin{aligned} x_{ji} &= \text{tonnellate di olio grezzo } j\text{−simo acquistate nel mese } i\text{−simo} \\ s_{ji} &= \text{tonnellate di olio grezzo } j\text{−simo stockate all'inizio del mese } i\text{−simo} \\ v_i &= \text{tonnellate di olio prodotto nel mese } i\text{−simo} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\max \sum_{i=gen}^{giu} prezzo \cdot v_i - \sum_{i=gen}^{giu} \sum_{j=veg1}^{oil3} costo_{ij} \cdot x_{ji} - 5 \sum_{i=gen}^{giu} \sum_{j=veg1}^{oil3} s_{ji} \\
\text{s.t.} \quad & v_{lug} = 0 \\
\text{s.t.} \quad & s_{j\ lug} = 500 \quad j = veg1, \ldots, oil3 \\
\text{s.t.} \quad & s_{j\ gen} = 500 \quad j = veg1, \ldots, oil3 \\
\text{s.t.} \quad & s_{ji} + x_{ji} \geq s_{j\ i+1} \quad j = veg1, \ldots, oil3 \quad i = gen, \ldots, giu \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=veg1}^{veg2} s_{ji} - s_{j\ i+1} + x_{ji} \leq 200 \quad i = gen, \ldots, giu \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=oil1}^{oil3} s_{ji} - s_{j\ i+1} + x_{ji} \leq 250 \quad i = gen, \ldots, giu \\
\text{s.t.} \quad & s_{ji} \leq 1000 \quad j = veg1, \ldots, oil3 \quad i = gen, \ldots, giu \\
\text{s.t.} \quad & v_i = \sum_{j=veg1}^{oil3} s_{ji} - s_{j\ i+1} + x_{ji} \quad i = gen, \ldots, giu \\
\text{s.t.} \quad & 3 \cdot v_i \leq \sum_{j=veg1}^{oil3} acidita_j \cdot (s_{ji} - s_{j\ i+1} + x_{ji}) \quad i = gen, \ldots, giu \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=veg1}^{oil3} acidita_j \cdot (s_{ji} - s_{j\ i+1} + x_{ji}) \leq 6 \cdot v_i \quad i = gen, \ldots, giu
\end{aligned}
$$