Capitolo 4

Problemi di Programmazione Lineare Intera

La Programmazione Lineare Intera (PLI) tratta il problema della massimizzazione (minimizzazione) di una funzione di più variabili, soggetta a vincoli di uguaglianza e disuguaglianza ed alla restrizione che una o più variabili possano assumere soltanto valori interi.

Grazie alla generalità del modello, un grandissimo numero di problemi reali possono essere rappresentati da modelli di Programmazione Lineare Intera. In generale, i modelli di Programmazione Intera sono adatti alle applicazioni caratterizzate dall'indivisibilità delle risorse e dalla necessità di scegliere tra un numero finito di alternative. Queste applicazioni includono *problemi operativi* quali la distribuzione di beni ed il sequenziamento delle attività produttive; *problemi di pianificazione* quali la gestione ottima del portafoglio titoli e la localizzazione degli impianti ed infine *problemi di progettazione* quali il progetto di circuiti VLSI ed il progetto di sistemi automatici di produzione (robotica). Recenti applicazioni dell'ottimizzazione combinatoria ad altri settori riguardano problemi in biologia molecolare, fisica delle alte energie e cristallografia a raggi X.

Le questoni teoriche poste da tali problemi e le tecniche usate per la loro soluzione hanno caratteristiche molto diverse da quelle relative ai problemi di ottimizzazione continua considerati nei precedenti capitoli. Lo scopo di questo capitolo è quello di illustrare alcune applicazioni tipiche della Programmazione Lineare Intera (PLI).

4.1 Formulazioni Classiche di Problemi Lineari Interi

In questo paragrafo vengono presentati esempi classici di problemi che possono essere formulati come problemi di PLI. Lo scopo di questi esempi è quello di mostrare come le variabili intere e le disequazioni che le collegano possano essere usate come *linguaggio formale* per esprimere una serie di relazioni tra eventi.

4.1.1 Knapsack binario

Il primo uso delle variabili intere (binarie) che esamineremo è anche il più naturale. Si supponga di dover modellare il fatto che un dato evento possa verificarsi oppure no. La natura binaria del problema suggerisce immediatamente l'idea di modellare questa dicotomia per mezzo di una variabile x che può assumere solo valori $0, 1$. In particolare, si porrà $x = 1$ se l'evento si verifica e $x = 0$ altrimenti.

Supponiamo di avere n oggetti. Il j-esimo oggetto, $j = 1, \ldots, n$, ha un valore pari a c_j e un peso pari a p_j. Supponiamo di avere una bisaccia ("knapsack" in inglese) in cui vogliamo mettere alcuni degli oggetti. La bisaccia può portare al massimo un peso b. Il problema di scegliere un sottoinsieme degli oggetti allo scopo di massimizzare la somma dei valori senza superare il limite imposto dal peso è il cosiddetto problema di *knapsack binario*:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq b \\ & x_j \in \{0,1\} \quad j = 1, \ldots, n. \end{array}$$

In questo caso l'evento è costituito dalla scelta (o meno) del singolo oggetto. In generale, questi problemi di scelta tra progetti possono avere più vincoli (si pensi al caso in cui la bisaccia abbia un limite dovuto al peso e uno dovuto al volume degli oggetti); in tal caso il problema viene detto di *knapsack multidimensionale*.

4.1.2 Assegnamento

Un altro problema classico di pianificazione riguarda l'assegnamento di lavori a persone. Supponiamo che n persone debbano svolgere n lavori. Ciascun lavoro deve essere svolto esattamente da una persona; inoltre, ciascuna persona può svolgere al più un lavoro. Il costo della persona j assegnata al lavoro i è c_{ij}. Il problema è quello di assegnare i lavori alle persone minimizzando il costo totale di realizzazione di tutti i lavori. Per formulare questo problema, che è noto come problema di *assegnamento*, introduciamo le variabili binarie x_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ corrispondenti all'evento ij definite come segue

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la persona } j \text{ è assegnata al lavoro } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché esattamente una persona deve essere assegnata al lavoro i, avremo i vincoli:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Inoltre, poiché ciascuna persona non può svolgere più di un lavoro, avremo i vincoli:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

È facile verificare che un vettore $x \in \{0,1\}^{m \times n}$ che soddisfa tutti i vincoli appena descritti individua un assegnamento ammissibile di persone ai lavori. La funzione obiettivo, ovviamente da minimizzare, può essere scritta come $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$.

4.1.3 Problema del costo fisso.

Nei modelli di Programmazione Lineare le variabili di decisione rappresentano usualmente i livelli ai quali le varie attività vengono svolte e la funzione obiettivo da minimizzare è una funzione lineare di tali variabili. In molti problemi pratici, tuttavia, tale ipotesi non è giustificata in quanto il costo di una attività, in funzione del livello cui essa viene svolta, può avere un andamento come quello riportato in Figura 4.1.

In particolare, il costo dell'attività j è zero se $x_j = 0$ (cioè se l'attività non è avviata) ed è invece uguale a $f_j + c_j x_j$ se $x_j > 0$ con f_j positivo. La funzione relativa all'attività j è quindi

$$z_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j = 0 \\ f_j + c_j x_j & \text{se } x_j > 0 \end{cases}$$

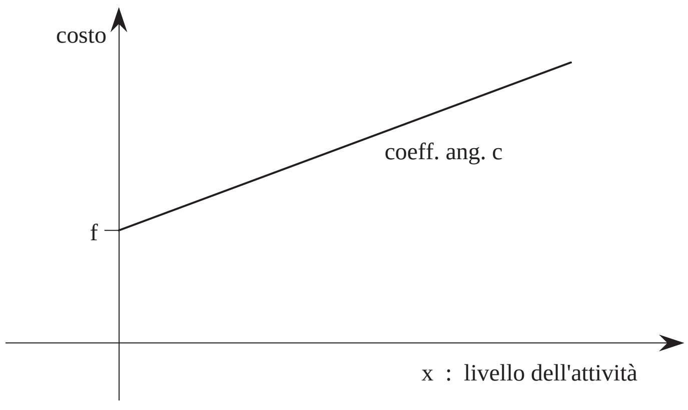

Figura 4.1: Costo dell'attività j.

Il valore f_j è detto *costo fisso* dell'attività j e deve essere pagato solamente se l'attività j viene svolta ad un livello non nullo. Per esempio, supponiamo che la variabile x_j rappresenti la quantità di petrolio greggio che deve essere trasportata da un pozzo A ad una raffineria B. In questo caso, se il pozzo A non rifornisce la raffineria B il costo complessivo di trasporto è ovviamente nullo. Se, al contrario, si decide di inviare una quantità non nulla x_j di greggio da A a B, al costo di trasporto c_jx_j (proporzionale alla quantità trasferita) dovrà essere sommato il costo fisso di costruzione dell'oleodotto f_j.

Se indichiamo che J_f le attività che prevedono un costo fisso, il problema che dobbiamo risolvere può essere scritto

$$\begin{array}{ll} \min & z(x) = \sum_{j \notin J_f} c_j x_j + \sum_{j \in J_f} z_j(x) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{array}$$

Chiaramente la funzione $z(x)$ è discontinua nell'origine e quindi il problema non è di Programmazione Lineare. Una possibile formulazione alternativa del Problema di Costo Fisso come problema di PLI si ottiene introducendo, per ciascuna attività, una variabile y_j che valga 1 quando $x_j > 0$ e 0 quando $x_j = 0$, cioè

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In questo modo la funzione obiettivo può essere scritta

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j \in J_f} y_j f_j = c^T x + f^T y,$$

dove $y \in \{0,1\}^{|J_f|}$ è il vettore le cui componente sono y_j e $z(x)$ è una funzione lineare.

Si tratta ora di imporre un vincolo che consenta di modellare la condizioni logiche

$$\begin{array}{l} x_j > 0 \Rightarrow y_j = 1 \\ x_j = 0 \Rightarrow y_j = 0 \end{array}$$

Se supponiamo di conoscere un limite superiore per la variabile x_j, cioè un valore α positivo maggiore del più grande valore che può assumere la x_j, il vincolo

$$x_j - \alpha y_j \leq 0$$

forza la variabile y_j ad assumere valore 1 se $x_j > 0$[1].

Per quanto riguarda la seconda condizione $x_j = 0 \Rightarrow y_j = 0$, osserviamo che se $x_j = 0$ la variabile y_j il processo di minimizzazione farà in modo che y_i sia nulla all'ottimo poichè $f_j \geq 0$.

Il problema di costo fisso può essere quindi formulato, assumendo che tutti i costi fissi f_j siano positivi, nel modo seguente:

$$\begin{array}{llll} (FC2) & \min\ z(x) & = & c^T x + f^T y \\ & & & Ax = b \\ & & & x_j \leq \alpha y_j, \qquad j \in J_f \\ & & & x \geq 0_n \\ & & & y_j \in \{0,1\}, \qquad j \in J_f \end{array}$$

dove α è un numero positivo maggiore del più grande valore che può essere assunto da ciascuna delle variabili x_j in una soluzione ottima. Se $x_j > 0$ la variabile y_j sarà forzata ad assumere il valore 1 ed il suo costo fisso si aggiungerà al valore della funzione obiettivo. È quindi evidente che una soluzione ottima del problema FC1 è anche ottima per FC2 e viceversa.

4.1.4 Capital Budgeting

Questo esempio illustra l'applicazione della PLI al problema della pianificazione degli investimenti ("Capital Budgeting" in inglese). Si tratta di uno degli esempi più significativi di applicazione della PLI alle problematiche della pianificazione finanziaria.

Un' azienda genera continuamente, nello svolgimento delle sue attività, proposte di investimento e spesa (*progetti* nel seguito). Alcuni di questi progetti richiedono l'impiego di risorse finanziarie per consentire lo sviluppo dei prodotti e della produzione; altre proposte possono invece riguardare il miglioramento delle strutture produttive dell'azienda. Usualmente la decisione di attivare o meno un progetto condiziona la possibilità di attivare altri progetti, sia per la presenza di limitazioni sulla disponibilità dei capitali (*Razionamento dei Capitali*), sia per la presenza di vincoli sulla disponibilità di personale, macchine etc.

Un' azienda che si appresti a operare delle scelte individua solitamente un orizzonte temporale T entro il quale intende limitare l'analisi. Per esempio si decide di considerare gli investimenti e le loro conseguenze limitando l'analisi ai prossimi tre anni, $T = 3$ anni. L'orizzonte temporale viene poi suddiviso in *periodi* $1, 2, \ldots t$. Per esempio, se $T = 3$ anni, e i periodi sono i trimestri abbiamo dodici periodi, cioè $t = 12$. Il progetto i può essere caratterizato dal vettore $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{it})$ del *Flusso di Cassa*. Il valore a_{ij} rappresenta il flusso di cassa (positivo o negativo) generato dal progetto i nel periodo j. Assumiamo che un flusso di cassa positivo corrisponda a una spesa, mentre uno negativo a un guadagno. Quindi se il vettore di flusso di cassa relativo a un certo progetto su un orizzonte temporale diviso in 5 periodi è $(5, 2, -1, -3, -8)$, vorrà dire che l'attivazione del progetto richiede una spesa di 5 nel primo periodo, di 2 nel secondo, e dà quindi un guadagno di 1, 3, 8 nel terzo, quarto e quinto periodo rispettivamente. Notiamo per inciso che questa è una struttura tipica (anche se esistono certamente delle eccezioni) dei flussi di cassa. Nei primi periodi l'attivazione di un progetto richiede degli investimenti, e quindi delle spese, una volta superata questa fase, si inziano ad avere guadagni. L'esborso totale generato dal progetto è dato dalla somma dei flussi di cassa nei vari periodi. In questo caso, l'esborso totale è $5+2-1-3-8 = -5$. Ricordiamo che con la nostra convenzione sui segni un numero negativo rappresenta un guadagno[2] In

[1] Osserviamo che la condizione $x_j > 0 \Rightarrow y_j = 1$ è equivalente a $y_j = 0 \Rightarrow x_j = 0$. Inoltre, volendo modellare la condizione $y_j = 1 \Rightarrow x_j = 0$, si può imporre il vincolo $x_j - \alpha(y_j - 1) \leq 0$.

[2] E' evidente che un guadagno (o un costo) all'istante j ha un "valore" diverso da un guadagno (o un costo) di pari importo ottenuto all'istante $k > j$. Per esempio, chiunque, dovendo scegliere tra l'avere un milione oggi o tra 2 anni, preferirebbe avere un milione oggi. Infatti, un milione oggi può essere investito in modo sicuro, (per esempio in buoni del tesoro) in modo di avere, tra due anni, più di un milione. Nel valutare una proposta

una situazione reale, per ogni periodo $j = 1, 2, \ldots, t$ abbiamo un "budget" cioè un limite agli esborsi (flussi di cassa positivi) che possiamo fare. Tali limiti derivano, ad esempio, da scelte aziendali o dalla limitata capacità dell'azienda di accedere al credito. Indichiamo con b_j il limite di budget nel periodo j-esimo. Cerchiamo di formulare adesso il problema di scegliere un sottoinsieme di progetti da attivare con il vincolo che in ogni periodo il vincolo di budget sia rispettato e in modo tale da rendere massimo il guadagno totale. A questo fine possiamo introdurre una variabile binaria x_i per ognuno degli n progetti possibili. Le variabili sono definite nel seguente modo:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{se il progetto } i \text{ è attivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Possiamo a questo punto formulare facilmente il problema come problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^n x_i \left(-\sum_{j=1}^t a_{ij}\right) \\ & \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j, \quad j = 1, \ldots, t \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Per capire la funzione obiettivo, bisogna ricordare che con la nostra convenzione di segni i guadagni sono numeri negativi. Quindi il termine $\left(-\sum_{j=1}^t a_{ij}\right)$ rappresenta, per ogni i, il guadagno derivante dall'attivazione del progetto i. Il cambio di segno serve a far diventare i guadagni numeri positivi e le perdite numeri negativi. I vincoli sono t, uno per ciascun periodo in cui è diviso l'orizzonte temporale e impongono che in ogni periodo non si superi il budget disponibile.

La formulazione del problema come problema di PLI permette di tenere facilmente conto di *vincoli logici* tra le attività. Facciamo alcuni esempi.

1. Se vogliamo imporre che il progetto 1 venga sicuramente attivato, basta aggiungere alla formulazione precedente il vincolo $x_1 = 1$.
2. Se vogliamo dire che almeno uno tra i progetti 2, 5, 89 deve essere attivato, basta aggiungere alla formulazione precedente il vincolo
$$x_2 + x_5 + x_{89} \geq 1.$$
3. Se vogliamo dire che uno e uno solo tra i progetti 2, 5, 89 deve essere attivato, basta aggiungere alla formulazione precedente il vincolo
$$x_2 + x_5 + x_{89} = 1.$$
4. Se vogliamo dire che al più uno tra i progetti 2, 5, 89 deve essere attivato, basta aggiungere alla formulazione precedente il vincolo
$$x_2 + x_5 + x_{89} \leq 1.$$
In questo, e nel precedente caso, i progetti di dicono *alternativi.*
5. Se vogliamo modellare il fatto che il progetto 7 può essere attivato solo se è stato attivato il progetto 9, basta aggiungere il vincolo
$$x_7 \leq x_9.$$
Se il progetto 7 può essere attivato solo se sono stati attivati i progetti 9 e 10, si può aggiungere il vincolo
$$x_7 \leq \frac{1}{2}(x_9 + x_{10}).$$

di investimento è fondamentale riportare i flussi di cassa nei vari periodi a una base comune. Questo processo è detto *attualizzazione.* Senza approfondire l'argomento, noi supponiamo che i vari a_{ij} siano stati attualizzati e siano quindi tra loro pienamente confrontabili. La procedure di attualizzazione è una procedure standard, molto semplice che non riportiamo qui solo perchè non aggiunge nulla agli argomenti cui siamo interessati.

Questi esempi possono essere facilmente generalizzati, e rappresentano il prototipo di come le variabili intere (e in particolare le variabili binarie) possano essere usate per modellare relazioni logiche tra eventi (in questo caso l'evento consiste nell'attivazione o meno di un progetto).

Facciamo un esempio di quanto visto finora. Supponiamo che il nostro orizzonte temporale di un anno sia diviso in 6 bimestri (T = un anno, t = 6), e che all'inizio dell'anno si debba decidere quali tra 5 progetti attivare. Nella tabella seguente si riportano i dati di interesse. La riga relativa ad ogni progetto riporta, per ogni periodo, il flusso di cassa generato dal progetto, mentre nell'ultima riga è riportato, per ogni periodo, il budget disponibile (le cifre sono tutte in milioni di euro e sono state attualizzate).

	Periodo 1	Periodo 2	Periodo 3	Periodo 4	Periodo 5	Periodo 6
Progetto 1	2	1	0	-2	-3	-1
Progetto 2	3	3	1	-4	-3	-4
Progetto 3	1	3	-1	2	-3	-4
Progetto 4	0	4	0	-5	-1	0
Progetto 5	4	-1	-3	-2	-1	-1
budget	8	8	5	2	2	1

Indichiamo con a_i la somma dei flussi di cassa generati dal progetto nei sei periodi i: $a_i = \sum_{j=1}^{6} a_{ij}$. Abbiamo

$$a_1 = -3, \quad a_2 = -4, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = -2, \quad a_5 = -4.$$

Notiamo che gli a_i sono tutti negativi, e questo corrisponde al fatto che i progetti considerati, al termine dell'orizzonte temporale, danno dei guadagni. A questo punto possiamo scrivere facilmente il problema di PLI che ci permette di determinare la scelta ottima. Il probelma ha cinque variabili, una per ogni progetto, e sei vincoli di budget, uno per ogni periodo.

$$\begin{array}{lll}
\max & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 & \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_5 & \leq \ 8 \\
& x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 & \leq \ 8 \\
& x_2 - x_3 - 3x_5 & \leq \ 5 \\
& -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 & \leq \ 2 \\
& -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 - x_5 & \leq \ 2 \\
& -x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_5 & \leq \ 1 \\
& x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \ldots, 5. &
\end{array}$$

Supponiamo ora che il progetto 4 copra solo 4 periodi dei 6 considerati. Questo è congruente col fatto che nel primo e nel sesto periodo quel progetto genera un flusso di cassa nullo.[3] Più precisamente, possiamo supporre che il progetto 4 copra il secondo, terzo, quarto e quinto periodo. Ci possiamo allora porre il problema di "posizionare" temporalmente il progetto. In particolare ci possiamo domandare se è conveniente far partire il progetto 4 e, nel caso, se sia più conveniente farlo partire nel primo nel secondo

[3] Attenzione, però, non è detto che un flusso di cassa nullo debba necessariamente corrispondere al fatto che un progetto non copra tutti i periodi. Un flusso di cassa zero può benissimo indicare semplicemente il fatto che in quel periodo le spese e i guadagni si equilibrano (vedi per esempio il progetto 1 nel periodo 3, o lo stesso progetto 4 sempre nel terzo periodo). In altre parole, l'informazione sulla durata effettiva dei progetti non è interamente ricavabile da una tabella come quella riportata. Per esempio, sarebbe stato congruente con la tabella data sapere che il progetto 4 copre 5 periodi (dal secondo al seto), ma che nell'ultimo periodo non genera né guadagni né perdite. Al contrario, dalla tabella si può dire con certezza che il progetto 5 copre tutti e sei i periodi considerati, perché esso genera un flusso di cassa non nullo in ogni periodo.

o nel terzo periodo. Notiamo che nella versione attuale il progetto 4 viene fatto iniziare nel secondo periodo. Per analizzare questo caso possiamo introdurre, al posto del progetto 4, tre progetti, che non sono altro che copie del progetto 4 posizionate temporalmente in modo diverso. La tabella con i dati del problema diventa allora la seguente.

	Periodo 1	Periodo 2	Periodo 3	Periodo 4	Periodo 5	Periodo 6
Progetto 1	2	1	0	-2	-3	-1
Progetto 2	3	3	1	-4	-3	-4
Progetto 3	1	3	-1	2	-3	-4
Progetto 4a	4	0	-5	-1	0	0
Progetto 4b	0	4	0	-5	-1	0
Progetto 4c	0	0	4	0	-5	-1
Progetto 5	4	-1	-3	-2	-1	-1
budget	8	8	5	2	2	1

In corrispondenza il probelma di PLI diventa:

$$\begin{array}{lll}
\max & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2(x_{4a} + x_{4b} + x_{4c}) + 4x_5 & \\
 & 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_{4a} + 4x_5 & \leq \; 8 \\
 & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_{4b} - x_5 & \leq \; 8 \\
 & x_2 - x_3 - 5x_{4a} + 4x_{4c} - 3x_5 & \leq \; 5 \\
 & -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_{4a} - 5x_{4b} - 2x_5 & \leq \; 2 \\
 & -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_{4b} - 5x_{4c} - x_5 & \leq \; 2 \\
 & -x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_{4c} - x_5 & \leq \; 1 \\
 & x_{4a} + x_{4b} + x_{4c} & \leq \; 1 \\
 & x_i \in \{0,1\}^7. &
\end{array}$$

Notiamo che, oltre all'ovvio incremento di variabili, abbiamo aggiunto il vincolo

$$x_{4a} + x_{4b} + x_{4c} \leq 1,$$

che ci dice che al più una delle "copie" del progetto 4 può essere attivata, non avendo ovviamente senso dire che bisogna far partire lo stesso progetto in due periodi differenti.

4.1.5 Localizzazione

I modelli di localizzazione sono uno dei principali strumenti per la pianificazione territoriale di *reti di servizio*. L'obiettivo generico è quello di decidere dove localizzare dei *centri di servizio*, quali impianti di produzione, depositi per la distribuzione, sportelli bancari, ospedali, allo scopo di soddisfare una domanda distribuita sul territorio, minimizzando un'opportuna funzione di costo.

Si consideri l'esempio di un'amministrazione cittadina che debba decidere dove costruire un numero prefissato di centri di pronto soccorso per servire i quartieri della città. Per ogni possibile sito di localizzazione sono noti i tempi medi di percorrenza da ciascun quartiere. Per fissare le idee, supponiamo che il numero di centri da costruire sia p, il numero di quartieri sia m e il numero di possibili siti per la localizzazione degli impianti sia n. Inoltre, indicheremo con c_{ij} il tempo medio di percorrenza dal quartiere $i \in \{1, \ldots, m\}$ al sito $j = \{1, \ldots, n\}$. L'obiettivo degli amministratori e quello di non sfavorire (troppo) nessuno dei potenziali utenti. In altri termini, a) tutti i quartieri devono essere serviti da un pronto soccorso e b) si deve minimizzare il tempo di percorrenza necessario all'utente più sfavorito (e cioè quello che impiega più tempo di tutti) a raggiungere il pronto soccorso.

Per poter modellare il problema di localizzazione come problema di programmazione lineare intera dobbiamo innanzitutto decidere le associazioni fra variabili ed eventi da rappresentare. In primo luogo si deve stabilire quali siti vengono scelti per localizzare i centri: associamo quindi una variabile booleana con ogni possibile sito, e cioè introduciamo una variabile booleana $x_j \in \{0, 1\}$ per $j = 1, \ldots, n$, con la convenzione che:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il sito } j \text{ è scelto} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La seconda informazione necessaria è a quale centro viene assegnato ciascun quartiere. Introduciamo quindi una nuova variabile booleana y_{ij} per ogni quartiere $i \in \{1, \ldots, m\}$ e per ogni possibile sito $j \in \{1, \ldots, n\}$, ove

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il quartiere } i \text{ è servito da un centro localizzato nel sito } j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poichè verranno costruiti esattamente p centri di pronto soccorso, sarà:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p \tag{4.1}$$

Inoltre, poichè ogni quartiere deve essere assegnato ad (esattamente) un sito, si deve avere

$$y_{i1} + y_{i2} + \ldots + y_{in} = 1 \qquad \text{per } i = 1, \ldots, m. \tag{4.2}$$

I vincoli (4.2) assicurano che ogni quartiere sia servito da un sito. Ovviamente, affinchè un quartiere possa essere servito da un determinato sito, occorre che in tale sito sia effettivamente localizzato un centro di pronto soccorso. Questo fatto può essere espresso dai seguenti vincoli lineari:

$$y_{ij} \leq x_j \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Si osservi infatti che, qualora si abbia $x_j = 0$ per qualche $j \in \{1, \ldots, n\}$ - e cioè nel sito j-esimo non è localizzato un centro di pronto soccorso, il vincolo (4.3) comporta $y_{ij} = 0$ per $i = 1, \ldots, n$ e quindi nessun quartiere può essere assegnato a un sito non selezionato per la localizzazione di un centro.

I vincoli finora descritti assicurano che ogni quartiere sia servito da qualche sito in cui sia localizzato un centro di pronto soccorso. Per descrivere la funzione obiettivo, abbiamo bisogno di qualche considerazione (e di una variabile) aggiuntiva. In particolare, se $\bar{x}, \bar{y}$ è una soluzione che soddisfa i vincoli (4.1),(4.2) e (4.3), qual è il tempo di percorrenza $t(i, \bar{y})$ dall'i-esimo quartiere al sito assegnatogli? Si osservi che se $\bar{y}_{ij} = 1$, il quartiere i-esimo è servito dal centro localizzato nel sito j-esimo, e quindi il tempo di percorrenza sarà c_{ij}. Quindi, grazie al vincolo (4.2), il generico tempo di percorrenza $t(i, y)$ può essere espresso come

$$t(i, y) = c_{i1}y_{i1} + c_{i2}y_{i2} + \ldots + c_{in}y_{in} \qquad \text{per } i = 1, \ldots, m.$$

L'obiettivo è quello di trovare la soluzione (x, y) che minimizza il più grande $t(i, y)$ per $i = 1, \ldots, m$. Introduciamo quindi una nuova variabile $z \in I\!R_+$ che rappresenta (un limite superiore per) il massimo tempo di percorrenza associato alla soluzione (x, y). Poichè z deve essere (maggiore o) uguale al massimo tempo di percorrenza, sarà maggiore o uguale di ogni tempo di percorrenza $t(i, y)$ per $i = 1, \ldots, m$. Quindi introduciamo i seguenti m vincoli lineari:

$$z \geq c_{i1}y_{i1} + c_{i2}y_{i2} + \ldots + c_{in}y_{in} \qquad \text{per } i = 1, \ldots, m. \tag{4.4}$$

Per minimizzare il massimo tempo di percorrenza è sufficiente minimizzare il suo limite superiore z e la funzione obiettivo si scriverà semplicemente

$$\min z$$

Riepilogando, il modello di localizzazione può essere scritto come segue:

$$
\begin{array}{lll}
\min z & & \\
\sum_{j=1}^{n} x_j = p & & \\
\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1 & & i = 1, \dots, m \\
z \geq \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_{ij} & & i = 1, \dots, m \\
x \in \{0,1\}^n, & y \in \{0,1\}^{m \times n} & .
\end{array}
$$

Esempio. Siano dati 3 siti candidati e 4 quartieri e supponiamo si vogliano localizzare 2 centri di pronto soccorso. I tempi di trasporto da quartiere a sito sono espressi nella seguente tabella

	quart. 1	**quart. 2**	**quart. 3**	**quart. 4**
Sito 1	7	6	7	8
Sito 2	10	10	1	1
Sito 3	9	5	4	1

Scriviamo innazitutto il vincolo (4.1):

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

Scriviamo ora i vincoli (4.2)

$$\begin{cases} y_{11} + y_{12} + y_{13} = 1 \\ y_{21} + y_{22} + y_{23} = 1 \\ y_{31} + y_{32} + y_{33} = 1 \\ y_{41} + y_{42} + y_{43} = 1 \end{cases}$$

Scriviamo ora i vincoli (4.3)

$$\begin{cases} y_{11} \leq x_1 \\ y_{12} \leq x_2 \\ y_{13} \leq x_3 \\ y_{21} \leq x_1 \\ y_{22} \leq x_2 \\ y_{23} \leq x_3 \\ y_{31} \leq x_1 \\ y_{32} \leq x_2 \\ y_{33} \leq x_3 \\ y_{41} \leq x_1 \\ y_{42} \leq x_2 \\ y_{43} \leq x_3 \end{cases}$$

Infine, i vincoli (4.4)

$$\begin{cases} z \geq 7y_{11} + 10y_{12} + 9y_{13} \\ z \geq 6y_{21} + 10y_{22} + 5y_{23} \\ z \geq 7y_{31} + 1y_{32} + 4y_{33} \\ z \geq 8y_{41} + 1y_{42} + 1y_{43} \end{cases}$$

Si osservi che per un problema così piccolo è facile calcolare la soluzione ottima enumerando tutte le soluzioni. A tal scopo, notiamo innanzitutto che, una volta scelti i due siti ove costruire i centri, la soluzione ottima è ottenuta assegnando ciascun cliente al sito più vicino. Ad esempio, se scegliamo il sito 1 e il sito 2 ($x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$, ci converrà assegnare il quartiere 1 e 2 al sito 1 , mentre i quartieri 3 e 4 al sito 2 ($y_{11} = y_{21} = y_{32} = y_{42} = 1$). Il quartiere più svantaggiato è il quartiere 1, con un tempo di percorrenza pari a 7. Se scegliamo il sito 1 e il sito 3, ci converrà assegnare il quartiere 1 al sito 3 , mentre i quartieri 2, 3 e 4 al sito 2. Anche in questo caso il quartiere più svantaggiato è il quartiere 1 con tempo medio di percorrenza pari a 9. Infine, se scegliamo il sito 2 e il sito 3, ci converrà assegnare i 1 e 2 al sito 3 , mentre i quartieri 3 e 4 al sito 2. Anche in questo caso il quartiere più svantaggiato è il quartiere 1 con tempo medio di percorrenza pari a 9. Quindi, la soluzione che minimizza il tempo di percorrenza del quartiere più svantaggiato è la prima, in corrispondenza alla scelta dei siti 1 e 2.

Per comprendere il significato dell'introduzione della variabile z, si consideri ancora l'esempio descritto. Si è visto che la soluzione ottima corrisponde alle seguenti assegnazioni ottime per il vettore (x,y): $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$, $y_{11} = y_{21} = y_{32} = y_{42} = 1$, $y_{ij} = 0$ altrimenti. Sostituendo nei vincoli (4.4), otteniamo:

$$\begin{cases} z \geq 7 \\ z \geq 6 \\ z \geq 1 \\ z \geq 1 \end{cases}$$

Quindi si deve avere $z \geq 7$ che corrisponde al tempo di percorrenza del quartiere più svantaggiato. Naturalmente, siccome si sta cercando il minimo valore di z, e non ci sono ulteriori vincoli sulla variabile z, all'ottimo avremo $z = 7$.

Questa particolare classe di problemi di programmazione lineare in cui si vuole minimizzare il massimo di una famiglia di funzioni lineari, viene detta *problema di min-max*: come visto, problemi di questo tipo possono essere risolti mediante l'introduzione di una variabile artificiale. Generalizzando leggermente, quello che abbiamo appena mostrato è che, se abbiamo un problema di min-max del tipo

$$\begin{array}{lrcl} \min & (\max_i c_i^T x) & & \\ & Ax & \leq & b \\ & (x & & \text{intero}), \end{array}$$

lo possiamo riscrivere come problema lineare introducendo una nuova variabile z:

$$\begin{array}{lrcl} \min & z & & \\ & c_i^T x & \leq & z, \quad \forall i \\ & Ax & \leq & b \\ & (x & & \text{intero}). \end{array}$$

Se (z^*, x^*) è una soluzione di questo problema, allora x^* è una soluzione del problema di min-max.

Un'ultima osservazione riguarda una naturale e più realistica estensione del problema di localizzazione. Infatti, molto spesso si devono aggiungere nuovi centri a un insieme di centri già attivi e localizzati sul territorio. Supponiamo ad esempio che k centri di pronto soccorso siano già localizzati nella città e che se ne vogliano attivare altri q. Allora, è possibile ancora una volta risolvere un problema di localizzazione in cui si vogliano attivare $p = k+q$ centri; nel modello, tuttavia, si porrà $x_j = 1$ per ogni sito j corrispondente a un centro già attivato.

4.1.6 Scheduling (Sequenziamento)

Concludiamo questa sezione sulle formulazioni con un esempio di utilizzazione delle variabili binarie per modellare *vincoli disgiuntivi*. Nell'usuale definizione di un problema di ottimizzazione si assume che tutti i vincoli debbano essere soddisfatti da una soluzione ammissibile. Tuttavia, in molte applicazioni capita che solo un sottoinsieme dei vincoli debba essere soddisfatto e che tale sottoinsieme sia specificato dal valore assunto da una opportuna variabile di decisione. In questo caso si dice che i vincoli sono *disgiuntivi*. Un esempio di applicazione di tali vincoli disgiuntivi è fornito dal problema di *Scheduling*.

Vincoli di tipo disgiuntivo sorgono abbastanza naturalmente in problemi di sequenziamento. In tali problemi si ha l'obiettivo di decidere l'ordine di processamento di un certo numero di lavori su una macchina a capacità unitaria. I vincoli disgiuntivi appaiono in quanto due lavori i e j non possono essere processati contemporaneamente sulla macchina e quindi *uno solo* dei vincoli (i precede j) o (j precede i) deve essere soddisfatto.

Supponiamo che debbano essere sequenziati n lavori su una macchina. Sia p_i il tempo di processamento del lavoro i sulla macchina. Poichè la macchina ha capacità unitaria, essa dovrà completare un lavoro prima di iniziare il lavoro successivo. Sia t_i l'istante in cui la macchina effettivamente inizia la lavorazione del lavoro i. Formulare il problema di scheduling consiste nel determinare vincoli sulle variabili t_i in modo tale che esse rappresentino sequenze effettivamente realizzabili sulla macchina.

Se il lavoro i è iniziato sulla macchina prima del lavoro j, dobbiamo avere $t_j \geq t_i + p_i$. D'altra parte, se il lavoro j inizia prima del lavoro i, dobbiamo avere $t_i \geq t_j + p_j$. Sia α un numero positivo molto grande e sia $y_{ij} = 1$ se i precede j e $y_{ij} = 0$ se j precede i. Considera il seguente sistema di vincoli:

$$
\begin{array}{rcll}
\alpha y_{ij} + t_i - t_j & \geq & p_j, & \quad 1 \leq i < j \leq n \\
\alpha(1 - y_{ij}) + t_j - t_i & \geq & p_i, & \quad 1 \leq i < j \leq n
\end{array}
$$

Osserviamo che se $y_{ij} = 1$ (cioè se i precede j) allora il primo vincolo è sempre soddisfatto poichè $\alpha >> p_j + t_j - t_i$, mentre il secondo vincolo esprime la condizione che la lavorazione di j può iniziare solo dopo il completamento di i. Una situazione analoga si avrà quando $y_{ij} = 0$.

Se un vettore (t, y) con $t \in I\!R^n$ ed $y \in \{0,1\}^{n \times n}$ soddisfa questo sistema allora, per quanto detto, ciascuna componente del vettore t rappresenta un istante ammissibile di inizio processamento per il corrispondente lavoro. Viceversa, per ogni vettore ammissibile t esiste sicuramente un vettore y (che rappresenta l'ordine di processamento dei lavori sulla macchina) tale che il vettore (t, y) è ammissibile per il precedente sistema di vincoli. Vincoli di precedenza o altre restrizioni temporali possono essere facilmente inseriti nel modello aggiungendo vincoli lineari sulle variabili t ed y.

Una situazione simile si ha quando si vuole imporre che, specificato un gruppo di variabili, al più un certo numero prefissato di esse possa essere diversa positive (per esempio, in un problema di miscelazione si può voler specificare che al più uno (o due) tra tre ingredienti può essere utilizzato nella miscela). Esemplifichiamo la tecnica che si può utilizzare supponendo di voler esprimere il fatto che al più due tra le variabili x_1, x_2 e x_3 possono essere positive. Possiamo scrivere:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \leq & \alpha y_1 \\
x_2 & \leq & \alpha y_2 \\
x_3 & \leq & \alpha y_3 \\
y_1 + y_2 + y_3 & \leq & 2 \\
y_1, y_2, y_3 & \in & \{0, 1\},
\end{array}
$$

dove α è di nuovo un numero "molto grande" (cioè più grande di qualunque valore le variabili x_i possano ragionevolmente assumere). Il quarto e quinto vincolo assieme impongono che al più due delle variabili y_i valgano 1. Di conseguenza, i primi tre vincoli impongono che al più due delle variabili x_i possano essere positive. La generalizzazione al caso di un numero qualunque di variabili di cui solo un numero k possono essere diverse da zero è ovvia. Può essere più interessante, invece, segnalare che nel caso di due sole variabili x_1 e x_2, ci si può limitare ad introdurre una sola variabile binaria:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \leq & \alpha y \\
x_2 & \leq & \alpha(1 - y) \\
y & \in & \{0, 1\}.
\end{array}
$$

La verifica della corrispondenza di questo insieme di vincoli alle richieste indicate sopra è immediata.