Capitolo 5

La dualità nella Programmazione Lineare

In questo capitolo verrà introdotto un concetto di fondamentale importanza sia per l'analisi dei problemi di Programmazione Lineare, sia per lo sviluppo di algoritmi risolutivi, sia per l'interpretazione dei risultati da essi prodotti. Si tratta del concetto di *dualità* che è legato alla possibilità di associare ad ogni problema di Programmazione Lineare un altro problema di Programmazione Lineare (chiamato *problema duale*) che ha la particolarità di permettere la deduzione di importanti proprietà del problema originario; quest'ultimo viene chiamato *problema primale.* In particolare, da un punto di vista computazionale, sarà possibile risolvere il problema duale al posto del problema primale e ottenere comunque le informazioni desiderate sulla soluzione ottima del problema primale.

Verrà inoltre esaminata un'interpretazione economica delle variabili del problema duale e verrà illustrato, attraverso gli esempi di un problema di allocazione ottima di risorse, di un problema di miscelazione e di un problema di trasporti, come il problema duale può avere interessanti interpretazioni applicative.

Si osservi che la teoria della dualità sarà esaminata in relazione a problemi di Programmazione Lineare, ma essa può essere estesa anche al caso di problemi di Programmazione Non Lineare.

5.1 Teoria della dualità

Un modo di introdurre il problema duale può essere quello di far riferimento alla possibilità di determinare delle stime inferiori del valore ottimo della funzione obiettivo di un problema di Programmazione Matematica (in forma di problema di minimizzazione). In particolare, dato un problema di Programmazione Lineare

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \end{cases} \tag{5.1}$$

(dove $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$) se si dispone di un punto ammissibile $\widetilde{x}$ può risultare molto interessante capire se esso rappresenta una buona stima di un punto di ottimo senza risolvere il problema esattamente. Infatti se si conoscesse una buona stima ϕ del valore ottimo potremmo capire la "bontà" del punto $\widetilde{x}$ confrontando il valore $c^T\widetilde{x}$ con la stima ϕ.

A questo scopo, sia $x^\star$ una soluzione ottima del problema (5.1); allora per ogni $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$, poiché $Ax^\star \geq b$ risulta

$$\begin{aligned} c^T x^\star &\geq c^T x^\star + y^T(b - Ax^\star) \\ &\geq \min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x + y^T(b - Ax) \end{aligned}$$

$$= \quad b^T y + \min_{x\in \mathbb{R}^n} (c^T - y^T A)x \tag{5.2}$$

Affinché il problema di minimizzazione presente nel secondo membro della (5.2) non sia illimitato inferiormente è necessario che il vettore y sia tale che risulti

$$A^T y = c.$$

Infatti, se così non fosse, cioè se risultasse $A^T y \neq c$ allora si potrebbe scegliere $x(\theta) = -\theta(A^T y - c)$ in corrispondenza del quale il problema di minimizzazione diventa

$$\min_{\theta} -\theta\|A^T y - c\|^2$$

che risulta illimitato inferiormente.

Nell'ipotesi $A^T y = c$ il membro destro della (5.2) si riduce a $b^T y$ e quindi risulta

$$c^T x^\star \geq b^T y. \tag{5.3}$$

Per rendere quanto più possible stringente la stima della limitazione inferiore del valore ottimo della funzione obiettivo $c^T x^\star$ si può rendere quanto più possibile grande il termine di destra della diseguaglianza (5.3), cioè si può massimizzare la quantità $b^T y$ al variare del vettore $y \in \mathbb{R}^n$, tra tutti i vettori che soddisfano $A^T y = c$, $y \geq 0$. Piú formalmente si ha

$$c^T x^\star \geq b^T x^\star$$

dove $y^\star$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \max b^T y \\ A^T y = c \\ y \geq 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

Il problema (5.4) prende il nome di *problema duale* del problema dato (5.1) che assume il nome di *problema primale*. Nel seguito, per semplicità, faremo riferimento al problema (5.1) anche come problema (P) e al problema (5.4) come problema (D).

La possibilità di definire un problema duale non è legato al fatto che il problema dato abbia solo vincoli di diseguaglianza e variabili non vincolate in segno. Infatti si può procedere in modo del tutto analogo in relazione ad un problema di Programmazione Lineare scritto nella forma generale

$$(\mathrm{P}_g) \qquad \begin{cases} \min c^T x + d^T y \\ Ax + Dy = b \\ Hx + Fy \geq g \\ x \geq 0 \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^{n-p}$, $y \in \mathbb{R}^{n-p}$; A matrice $q \times p$, D matrice $q \times (n-p)$ e $b \in \mathbb{R}^q$; H matrice $(m-q) \times p$, F matrice $(m-q) \times (n-p)$ e $g \in \mathbb{R}^{m-q}$; e dove la g in (P_g) sta per "**g**enerale". La notazione in cui è scritto questo generico problema di Programmazione Lineare (P_g) è tale da evidenziare separatamente gli elementi che intervengono nella formulazione: le variabili sono partizionate nella variabili x vincolate in segno e y non vincolate in segno e corrispondentemente anche i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono partizionati in c e d; i vincoli sono scritti suddividendo quelli di uguaglianza e quelli di disuguaglianza (nella forma di maggiore o uguale).

Questo problema può essere messo nella forma del problema (5.1) e se ne può quindi scrivere il duale come indicato sopra. Omettendo i dettagli (e dopo opportune manipolazioni algebriche) si ottiene come problema duale il seguente problema

$$(\mathrm{D}_g) \qquad \begin{cases} \max b^T u + g^T v \\ A^T u + H^T v \leq c \\ D^T u + F^T v = d \\ v \geq 0 \end{cases}$$

con $u \in \mathbb{R}^q$ e $v \in \mathbb{R}^{m-q}$.
Il problema (D_g) è il *problema duale* del problema (P_g) che viene detto *problema primale*. Le variabili (x, y) sono dette *variabili primali*; le variabili (u, v) sono dette *variabili duali*. I due problemi vengono chiamati *coppia primale–duale*. In maniera del tutto simmetrica, il problema (P_g) risulterà il problema duale del problema (D_g).

Dall'osservazione dei due problemi (P_g) e (D_g) si deducono facilmente le caratteristiche fondamentali di una coppia primale–duale; innanzitutto un problema è di minimizzazione mentre l'altro è di massimizzazione. Inoltre poiché la matrice dei coefficienti dei vincoli di un problema si ottiene trasponendo quella dell'altro, si ha che ad ogni variabile di un problema corrisponde un vincolo nell'altro. Si osserva inoltre uno scambio tra i termini noti di un problema e i coefficienti della funzione obiettivo dell'altro.

Queste proprietà possono essere così schematicamente riassunte:

- il problema duale di un problema di minimizzazione è un problema di massimizzazione e simmetricamente, il problema duale di un problema di massimizzazione è un problema di minimizzazione;
- ad ogni vincolo di uguaglianza del problema primale è associata una variabile nel problema duale non vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni vincolo di disuguaglianza del problema primale è associata una variabile nel problema duale vincolata in segno che ha come coefficiente nella funzione obiettivo duale il termine noto del vincolo primale associato;
- ad ogni variabile vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di disuguaglianza del problema duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale;
- ad ogni variabile non vincolata in segno del problema primale è associato un vincolo di uguaglianza del problema duale il cui termine noto è dato dal coefficiente della funzione obiettivo primale.

Queste corrispondenze sono sintetizzate nella tabella che segue, dove gli insieme I, J, M e N sono insiemi di indici:

	PRIMALE	**DUALE**	
	$\min c^T x$	$\max b^T u$	
VINCOLI	$= b_i, \quad i \in I$	$u_i, \quad i \in I$, libere	VARIABILI
	$\geq b_i, \quad i \in J$	$u_i, \quad i \in J,\ u_i \geq 0$	
VARIABILI	$x_j \geq 0, \quad j \in M$	$\leq c_j, \quad j \in M$	VINCOLI
	$x_j, \quad j \in N$ libere	$= c_j, \quad j \in N$	

Un importante caso di coppia primale–duale è ottenuto considerando nel problema primale solamente i vincoli di disuguaglianza e solamente variabili vincolate in segno. In questo caso si ottiene la seguente coppia di problemi:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Tale coppia di problemi viene detta *coppia primale–duale simmetrica*.

Nel seguito di questo capitolo, daremo risultati sulla dualità con riferimento alla coppia (5.1) (problema primale) e (5.4) (problema duale). I risultati che veranno discussi, però, valgono, in base a quanto appena illustrato, per una qualunque coppia di problemi primale–duale.

Seguono ora alcuni esempi di costruzione del problema duale di un problema di Programmazione Lineare assegnato.

Esempio 5.1.1 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \\ x_1 - 5x_3 + 2x_4 \geq 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 \geq 9. \end{cases}$$

Il problema duale associato è

$$\begin{cases} \max 7u_1 + 9u_2 \\ u_1 + 2u_2 = 2 \\ 4u_2 = 3 \\ -5u_1 - 6u_2 = 4 \\ 2u_1 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0. \end{cases}$$

Esempio 5.1.2 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \max 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ 2x_1 - x_3 \leq 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 5 \\ x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Il problema duale è il seguente problema di minimizzazione

$$\begin{cases} \min 8u_1 + 7u_2 + 5u_3 + 6u_4 \\ u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 4 \\ 2u_1 + 4u_3 + u_4 \geq 3 \\ 3u_1 - u_2 - u_3 - u_4 = 2 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0, u_4 \geq 0. \end{cases}$$

Esempio 5.1.3 *Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 7 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 \leq 9 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Dopo aver riscritto il secondo vincolo come $-x_1 - x_2 + 6x_3 \geq -9$ *si può formulare facilmente il problema duale associato*

$$\begin{cases} \max 7u_1 - 9u_2 + 8u_3 \\ 3u_1 - u_2 + 4u_3 \leq 2 \\ u_1 - u_2 - u_3 \leq -3 \\ 5u_1 + 6u_2 - 2u_3 = 1 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

5.1.1 Risultati fondamentali della teoria della dualità

Una coppia primale–duale di problemi di Programmazione Lineare gode di proprietà importanti sia dal punto di vista teorico sia da quello pratico. Dal modo in cui è stato introdotto il problema duale, segue in maniera naturale il seguente risultato, che non è nient'altro che una formalizzazione delle osservazioni fatte all'inizio del capitolo.

Teorema 5.1.4 – Teorema della Dualità debole
Per ogni soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema primale (5.1) ed ogni soluzione ammissibile $\bar{y}$ del problema duale (5.4) si ha

$$b^T\bar{y} \leq c^T\bar{x},$$

cioè il valore della funzione obiettivo duale in qualunque punto ammissibile del duale è minore o uguale del valore della fuzione obiettivo primale in qualunque punto ammissibile del primale .

Da questo importante teorema discendono due conseguenze immediate che sono riportate nei corollari che seguono. Nel seguito seguitismo a indicare con (P) il problema (5.1) e con (D) il problema (5.4).

Corollario 5.1.5 *Se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile del problema primale (P) e $\bar{y}$ una soluzione ammissibile del problema duale (D) tali che*

$$c^T\bar{x} = b^T\bar{y} \tag{5.6}$$

allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale (P) e per il problema duale (D).

Dim.: La dimostrazione procede per assurdo. Infatti, supponiamo che $\bar{y}$ non sia soluzione ottima del problema duale (D). Questo significa che esiste una soluzione ammissibile del problema duale (D) che indichiamo con $\widetilde{y}$ tale che

$$b^T\widetilde{y} > b^T\bar{y}.$$

Per la (5.6) si avrebbe

$$b^T\widetilde{y} > b^T\bar{y} = c^T\bar{x}$$

contraddicendo il Teorema 5.1.4 (Teorema della Dualità debole).
Simmetricamente, si ottiene una contraddizione supponendo che $\bar{x}$ non sia soluzione ottima del problema primale (P). $\square$

Corollario 5.1.6 *Se il problema primale (P) è illimitato (inferiormente) allora il problema duale (D) è inammissibile. Viceversa, se il problema duale è illimitato (superiormente) allora il problema primale è inammissibile.*

Dim.: Supponiamo che il problema primale (P) sia illimitato e che, per assurdo, il problema duale (D) non sia inammissibile, cioè che esista una soluzione ammissibile $\bar{y}$ del problema duale (D). Per il Teorema 5.1.4 (Teorema della Dualità debole), per ogni soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema primale (P) deve valere

$$b^T\bar{y} \le c^T\bar{x} \tag{5.7}$$

e, poiché si è supposto che il problema primale (P) è illimitato inferiormente, con la (5.7) si ottiene una contraddizione al fatto che $\bar{y}$ è una soluzione ammissibile del problema duale (D). In modo del tutto simmetrico si dimostra il viceversa. □

Oltre alle proprietà fino ad ora esaminate, nel caso di problemi di Programmazione Lineare è vera anche un'altra proprietà che è solitamente chiamata *dualità forte* che fornisce una caratterizzazione importante nel caso in cui esista soluzione ottima di uno dei due problemi della coppia primale duale. Questa proprietà è descritta nel seguente teorema che si riporta senza dimostrazione in quanto la dimostrazione richiederebbe ulteriori risultati preliminari che per brevità non è possibile trattare.

Teorema 5.1.7 – TEOREMA DELLA DUALITÀ FORTE
Il problema primale (P) ammette una soluzione ottima $x^\star$ se e solo se il problema duale (D) ammette una soluzione ottima $y^\star$. Inoltre i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi all'ottimo sono uguali cioè

$$c^T\bar{x}^\star = b^T\bar{y}^\star$$

Sulla base dei risultati fino ad ora esaminati si evince che data un coppia primale–duale di problemi di Programmazione Lineare possono verificarsi le seguenti situazioni: o entrambi ammettono soluzione ottima, oppure se uno è illimitato l'altro è inammissibile, oppure sono entrambi inammissibili. Queste possibilità sono riportate schematicamente nella tabella che segue.

		DUALE		
		OTTIMO FINITO	ILLIMITATO SUPERIOR.	INAMMISSIBILE
PRIMALE	OTTIMO FINITO	SI	NO	NO
	ILLIMITATO INFERIOR.	NO	NO	SI
	INAMMISSIBILE	NO	SI	SI

Seguono alcuni esempi che illustrano, su coppie primali–duali generiche, i risultati teorici ora dimostrati.

Esempio 5.1.8 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ 5x_1 + x_2 \geq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Geometricamente si ricava facilmente che questo problema ammette soluzione ottima nel punto $(x_1, x_2) = (4, 5)$ *e il valore ottimo della funzione obiettivo è pari a* 19*. Se si considera il problema duale*

$$\begin{cases} \max 24y_1 + 25y_2 \\ y_1 + 5y_2 \leq 1 \\ 4y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0; \end{cases}$$

si ricava facilmente (geometricamente) che, in accordo con quanto previsto dal Teorema della Dualità Forte, anche questo problema ammette soluzione ottima — nel punto $(y_1, y_2) = \left(\frac{14}{19}, \frac{1}{19}\right)$ *— e il valore ottimo della funzione obiettivo vale* 19*.*

Esempio 5.1.9 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \max 2x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 3 \\ -\frac{1}{2} + x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

Geometricamente si ricava che il problema è illimitato superiormente. Quindi, per l'analisi teorica vista deve risultare che il suo duale è inammissibile. E infatti se si considera il problema duale associato

$$\begin{cases} \min 3y_1 + 6y_2 \\ -2y_1 - \frac{1}{2}y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

si vede facilmente che questo problema non ammette soluzioni ammissibili.

Esercizio 5.1.10 *Risovere graficamente i problemi di Programmazione Lineare proposti nell'Esempio 5.1.8 e nell'Esempio 5.1.9 e verificare le conclusioni tratte negli esempi.*

5.1.2 Condizioni di complementarità

Un'ulteriore proprietà della coppia primale–duale è la cosidetta *complementarietà.* Tale proprietà è di fondamentale importanza anche negli sviluppi algoritmici in quanto è alla base dei cosiddetti *metodi primali duali* per soluzione dei problemi di Programmazione Lineare.

Riportiamo di seguito un teorema fondamentale che caratterizza ulteriormente le soluzioni ottime di una coppia primale–duale di problemi di Programmazione Lineare.

Teorema 5.1.11 *Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile del problema primale (P) e sia $\bar{y}$ un punto ammissibile del problema duale (D). Allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) se e solo se soddisfano le seguenti condizioni:*

$$\bar{y}^T (A\bar{x} - b) \quad = \quad 0. \tag{5.8}$$

Dim.: Iniziamo supponendo che valgano la (5.8) e mostrando che allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D). Infatti per l'ammissibilità duale di $\bar{y}$ si ha $A^T\bar{y} = c$ ed inoltre, per la (5.8), risulta $\bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b$ da cui

$$c^T\bar{x} = \bar{x}^T c = \bar{x}^T A^T\bar{y} = \bar{y}^T A\bar{x} = \bar{y}^T b = b^T\bar{y}$$

e quindi, poiché si è ottenuto $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$, per il Corollario 5.1.5 si ottiene che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D).

Dimostriamo ora che se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) allora vale la (5.8). Infatti, per l'ammissibilità duale di $\bar{y}$ si ha $A^T\bar{y} = c$ e $y \geq 0$ e per l'ammissibilità primale di $\bar{x}$ si ha $A\bar{x} \leq b$. Quindi risulta

$$\begin{aligned} c^T\bar{x} = \bar{x}^T c \quad &= \quad \bar{x}^T A^T\bar{y} \\ &= \quad \bar{y}^T A\bar{x} \\ &\leq \quad b^T\bar{y}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Ora, poiché $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D), per il Corollario 5.1.5 deve essere $c^T\bar{x} = b^T\bar{y}$ e quindi tutte la disuguaglianza nella (5.9) è in realtà una uguaglianza, cioè risulta

$$\begin{aligned} c^T\bar{x} \quad &= \quad \bar{x}^T A^T\bar{y} + \\ &= \quad \bar{y}^T A\bar{x} \\ &= \quad b^T\bar{y} \\ &= \quad \bar{y}^T b. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dalla uguaglianza terzo e ultimo membro segue che

$$\bar{y}^T(A\bar{x} - b) = 0, \tag{5.11}$$

che era quanto si voleva dimostrare □

Dal precedente risultato seguono facilmente il seguente corollario che è quello a cui si fà generalmente riferimento quando si parla di condizioni di complementarità.

Corollario 5.1.12 *Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile del problema primale (P) e sia $\bar{y}$ un punto ammissibile del problema duale (D). Allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) se e solo se soddisfano le:*

$$\bar{y}_i(A\bar{x})_i = 0 \tag{5.12}$$

$i = 1, \ldots, m$.

Dim.: Per il Teorema 5.1.11 $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime dei rispettivi problemi se e solo se i prodotti scalari

$$\bar{y}^T(A\bar{x} - b) \quad = \quad 0.$$

Ora, poiché per l'ammissibilità primale risulta $A\bar{x} - b \leq 0$ e per l'ammissibilità duale risulta $y \geq 0$, si ha che affinché il prodotto scalare risulti nullo, ogni termine del prodotto deve essere nullo e quindi il corollario è dimostrato. □

Il corollario può essere riformulato anche nei seguenti termini.

Corollario 5.1.13 *Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile del problema primale (P) e sia $\bar{y}$ un punto ammissibile del problema duale (D). Allora $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P) e del problema duale (D) se e solo se:*

(i) *per ogni variabile del problema (D) che assume valore non nullo il corrispondente vincolo del problema (P) è soddisfatto all'uguaglianza.*

Poiché l'estensione dei due precedenti corollari al caso della coppia di problemi primale–duale generale può risultare non ovvia, riportiamo qui di seguito questi due corollari anche per la coppia (P_g) e (D_g).

Corollario 5.1.14 *Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto ammissibile del problema primale (P_g) e sia $(\bar{u}, \bar{v})$ un punto ammissibile del problema duale (D_g). Allora $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\bar{u}, \bar{v})$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P_g) e del problema duale (D_g) se e solo se soddisfano le seguenti proprietà:*

$$\bar{v}_j \left(H^T\bar{x} + F^T\bar{y} - g\right)_j \quad = \quad 0 \tag{5.13}$$
$$\bar{x}_i \left(c - A^T\bar{u} + H^T\bar{v}\right)_i \quad = \quad 0. \tag{5.14}$$

$i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, m - p$.

Corollario 5.1.15 *Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto ammissibile del problema primale (P_g) e sia $(\bar{u}, \bar{v})$ un punto ammissibile del problema duale (D_g). Allora $(\bar{x}, \bar{y})$ e $(\bar{u}, \bar{v})$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema primale (P_g) e del problema duale (D_g) se e solo se soddisfano le seguenti proprietà:*

(i) *per ogni variabile vincolata in segno del problema (P_g) che assume valore non nullo il corrispondente vincolo del problema (D) è soddisfatto all'uguaglianza;*

(ii) *per ogni variabile vincolata in segno del problema (D_g) che assume valore non nullo il corrispondente vincolo del problema (P) è soddisfatto all'uguaglianza.*

Può risultare molto utile particolarizzare questi risultati al caso della coppia primale–duale simmetrica (5.5)

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases} \tag{5.16}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. In riferimento a questa coppia di problemi si può riformulare il Teorema 5.1.11 nel seguente modo:

Teorema 5.1.16 Condizioni di Ottimalità per la coppia primale–duale simmetrica *Due punti $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ sono soluzioni ottime rispettivamente del problema (5.15) e (5.16) se e solo se valgono le seguenti condizioni:*

(i) $A\bar{x} \geq b, \quad x \geq 0$ *(ammissibilità primale)*

(ii) $A^T\bar{u} \leq c, \quad u \geq 0$ *(ammissibilità duale)*

(iii) $\bar{u}^T(A\bar{x} - b) = 0$ *(condizioni di complementarità)*

(iv) $\bar{x}^T(c - A^T\bar{u}) = 0$

Anche il Corollario 5.1.12 può essere facilmente particolarizzato al caso della coppia primale–duale simmetrica (5.15) – (5.16):

Corollario 5.1.17 *Due punti $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ ammissibili rispettivamente per i problemi (5.15) e (5.16) sono ottime per i rispettivi problemi se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

(i) $\bar{u}_i(A\bar{x} - b)_i = 0, \quad i = 1, \dots, m$

(ii) $\bar{x}_j(c - A^T\bar{u})_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$

Da questo corollario si deduce facilmente il fatto che per ogni variabile del problema primale (5.15) non nulla all'ottimo, il corrispondente vincolo del problema duale (5.16) è soddisfatto all'uguaglianza e simmetricamente per ogni variabile del problema duale (5.16) non nulla all'ottimo, il corrispondente vincolo del problema primale (5.15) è soddisfatto all'uguaglianza.

Seguono alcuni esempi di applicazione della complementarità.

Esempio 5.1.18 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$\begin{cases} \min 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \\ x_1 - 3x_3 + 2x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 3 \end{cases} .$$

Il problema duale associato è

$$\begin{cases} \max 5u_1 + 3u_2 \\ u_1 + 2u_2 = 3 \\ u_2 = 2 \\ -3u_1 - u_2 = 1 \\ 2u_1 = 4 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Poiché il duale ha solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a $u^T(Ax - b) = 0$ che in questo caso sono

$$\begin{aligned} u_1(x_1 - 3x_3 + 2x_4 - 5) &= 0 \\ u_2(2x_1 + x_2 - x_3 - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Esempio 5.1.19 *Dato il problema di programmazione lineare*

$$\begin{cases} \min 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_4 = 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

si consideri il punto $\bar{x} = (0, 0, 2, 1/3)$ soluzione ammissibile per il problema (5.17) e il punto $\bar{u} = (1, 1/3)$ soluzione ammissibile per il problema duale associato a (5.17). Attraverso le condizioni di complementarità si vuole verificare se $\bar{x}$ è una soluzione ottima del problema del problema (5.17). Innanzitutto scriviamo il problema duale del problema dato; esso è

$$\begin{cases} \max 2u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ u_1 \leq 3 \\ u_1 \leq 1 \\ 3u_2 \leq 1. \end{cases}$$

Poiché il problema (5.17) presenta solo vincoli di uguaglianza, le condizioni di complementarità si riducono a $x^T(c - A^T u) = 0$ *che in questo caso sono*

$$
\begin{aligned}
&x_1(2 - u_1 - 2y_2) = 0\\
&x_2(3 - u_1) = 0\\
&x_3(1 - u_1) = 0\\
&x_4(1 - 3u_2) = 0
\end{aligned}
$$

Sostituendo i valori delle soluzioni ammissibili $\bar{x}$, $\bar{u}$ *rispettivamente per il primale ed il duale, le condizioni di complementarità risultano verificate. Quindi la soluzione* $\bar{x}$ *è effettivamente ottima per il primale e* $\bar{u}$ *è ottima per il duale.*

Esempio 5.1.20 *Si consideri il problema di Programmazione Lineare*

$$
\begin{cases}
\min c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3\\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 2\\
x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 3\\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0
\end{cases}
$$

con $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $c_3 \in \mathbb{R}$. *Utilizzando la teoria della dualità, si vuole stabilire se esistono valori (non tutti nulli) di* c_1, c_2, c_3 *tali che il punto* $\bar{x} = (0,\ 0,\ 1/2)^T$ *sia una soluzione ottima del problema. Innanzitutto scriviamo il problema duale associato che è*

$$
\begin{cases}
\max -2u_1 - 3u_3\\
-u_1 - u_2 \le c_1\\
-2u_1 - 4u_2 \le c_2\\
-2u_1 - 2u_2 \le c_3\\
u_1 \ge 0, u_2 \ge 0.
\end{cases}
$$

e le condizioni di complementarità

$$
\begin{aligned}
&u_1(-2 + x_1 + 2x_2 + 2x_3) = 0\\
&u_2(-3 + x_1 + 4x_2 + 2x_3) = 0\\
&x_1(c_1 + u_1 + u_2) = 0\\
&x_2(c_2 + 2u_1 + 4u_2) = 0\\
&x_3(c_3 + 2u_1 + 2u_2) = 0
\end{aligned}
$$

Sostituendo il punto $\bar{x}$ *affinché siano soddisfatte tutte le equazioni deve essere*

$$
\bar{u}_1 = 0, \quad \bar{u}_2 = 0, \quad \frac{1}{2}(c_3 + 2\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2) = 0
$$

e quindi $c_3 = 0$ *(dove* $\bar{u}$ *è soluzione ottima del problema duale). Quindi le condizioni di complementarità sono soddisfatte per qualuque* c_1 *e* c_2 *e* $c_3 = 0$. *Quindi il punto dato* $\bar{x}$ *è soluzione ottima del problema per qualsiasi valore di* c_1 *e* c_2 *e* $c_3 = 0$.

5.2 Interpretazione della Dualità

Nei modelli reali le variabili (primali) possono rappresentare, ad esempio, livelli di produzione e i coefficienti di costo possono essere associati ai profitti ricavati dalla vendita dei prodotti. Quindi la funzione obiettivo di un problema primale indica direttamente come un aumento della produzione può influenzare il profitto. Sempre in relazione, ad esempio, ad un modello per la pianficazione della produzione, i vincoli di un problema (primale) possono rappresentare una limitazione dovuta alla limitata disponibilità delle risorse; ora, un aumento della disponibilità delle risorse può consentire un aumento della produzione e quindi anche del profitto, ma questa relazione tra aumento della disponibilità delle risorse e aumento del profitto non si deduce facilmente dal problema formulato (il problema primale). Uno dei possibili usi della dualità è quello di rendere esplicito l'effetto dei cambiamenti nei vincoli (ad esempio in quelli di disponibilità di risorse) sul valore della funzione obiettivo. Questo perché, come vedremo, le variabili duali possono essere anche interpretate come i cosiddetti *prezzi ombra* in quanto misurano i "costi" impliciti associati ai vincoli.

5.2.1 Interpretazione economica della dualità e prezzi ombra

Per introdurre il concetto delle variabili duali come prezzi ombra facciamo riferimento ad un semplice esempio di modello di pianificazione della produzione che brevemente descriviamo.

Esempio 5.2.1 *Un'industria produce due tipi di prodotti: un tipo* de luxe *e un tipo* standard. *Per avere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi sono necessari due ingredienti grezzi* $\mathbf{I_1}$ *e* $\mathbf{I_2}$ *e la lavorazione su una macchina. La tabella che segue riporta le quantità in Kg di ciascuno degli ingredienti e le ore di lavorazione sulla macchina necessarie per ottenere un prodotto finito di ciascuno dei due tipi.*

	de luxe	standard
$\mathbf{I_1}$	*3*	*2*
$\mathbf{I_2}$	*4*	*1*
ore lavoraz.	*2*	*1*

Settimanalmente si hanno a disposizione al piú 1200 Kg dell'ingrediente $\mathbf{I_1}$ *e al piú 1000 Kg dell'ingrediente* $\mathbf{I_2}$ *mentre la disponibilità massima settimanale di ore lavorative della macchina è pari a 700. Un prodotto* de luxe *è venduto a 24 Euro e un prodotto* standard *è venduto a 14 Euro. Si vuole pianificare la produzione settimanale in modo da massimizzare il profitto complessivo assumendo che i prodotti siano frazionabili.*

Si tratta di un problema di allocazione ottima di risorse limitate che può essere formulato come problema di Programmazione Lineare nel seguente modo:

$$\begin{cases} \max 24x_1 + 14x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 1200 \\ 4x_1 + x_2 \leq 1000 \\ 2x_1 + x_2 \leq 700 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

dove le variabili x_1 e x_2 rappresentano le quantità di prodotti ripettivamente del tipo *de luxe* e del tipo *standard* da fabbricare settimanalmente.

Consideriamo, ora, il problema duale del problema ora formulato; esso è

$$\begin{cases} \min 1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3 \\ 3u_1 + 4u_2 + 2u_3 \geq 24 \\ 2u_1 + u_2 + u_3 \geq 14 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

La soluzione ottima del primale è

$$x_1^\star = 160, \qquad x_2^\star = 360$$

e il valore ottimo della funzione obiettivo primale è pari a 8880.

La soluzione ottima del duale è

$$u_1^\star = 6.4, \qquad u_2^\star = 1.2, \qquad u_3^\star = 0$$

e il valore ottimo della funzione obiettivo duale è pari a 8880. (Si verifichi ciò usando AMPL) Quindi il Teorema della Dualità Forte è verificato.
Scriviamo, ora, le condizioni di complementarità:

$$\begin{array}{rcl} x_1^\star(3u_1^\star + 4u_2^\star - 2u_3^\star - 24) & = & 0 \\ x_2^\star(2u_1^\star + u_2^\star + u_3^\star - 14) & = & 0 \\ u_1^\star(1200 - 3x_1^\star - 2x_2^\star) & = & 0 \\ u_2^\star(1000 - 4x_1^\star - x_2^\star) & = & 0 \\ u_3^\star(700 - 2x_1^\star - x_2^\star) & = & 0 \end{array}$$

Si verifica immediatamente che tali condizioni sono soddisfatte. Si osservi che tutte le equazioni tranne l'ultima sono verificate in quanto si annulla il secondo dei due fattori moltiplicativi. Questo significa, in particolare, che il primo e il secondo vincolo del problema primale sono attivi nella soluzione ottima, cioè verificati all'uguaglianza. L'ultima equazione invece è verificata per il fatto che è nulla all'ottimo la variabile duale $u_3^\star$ mentre il vincolo corrispondente primale (cioè il terzo vincolo del problema primale) non è verificato all'uguaglianza. Infatti in corrispondenza della soluzione ottima il valore ottenuto è $2x_1^\star + x_2^\star = 680$. Poiché la disponibilità di ore lavorative è pari a 700 ore, si hanno ancora 20 ore disponibili (surplus). Quindi l'industria, per aumentare il profitto, potrebbe acquistare altre quantità di ingredienti grezzi e quindi aumentare la disponibilità settimanale di questi ingredienti e utilizzare le ore di lavorazione ancora rimaste disponibili. Poiché i valori all'ottimo della funzione obiettivo primale e della funzione obiettivo duale coincidono e poiché la funzione obiettivo duale è

$$1200u_1 + 1000u_2 + 700u_3,$$

essendo $u_1^\star = 6.4$, $u_2^\star = 1.2$, $u_3^\star = 0$, l'aumento di 1 Kg della disponibilità di ingrediente $\mathbf{I_1}$ (da 1200 a 1201 Kg) porta ad un incremento di 6.4 Euro nel profitto complessivo. Analogamente per l'ingrediente $\mathbf{I_2}$: un incremento di 1 Kg (da 1000 a 1001 Kg) porta ad un incremento del profitto complessivo di 1.2 Euro.

Questo è il motivo per cui le variabili duali sono anche chiamate *prezzi ombra* e determinano il *valore marginale* delle risorse. Ovviamente il fatto che $u_3^\star = 0$ significa che l'aumento della disponibilità di ore lavorative non porta a nessun incremento del profitto, ma questo è ovvio in quanto ore lavorative inutilizzate sono già disponibili.

Nell'ipotesi che, ad esempio, si possa incrementare la disponibilità di una sola delle risorse, naturalmente esaminando i prezzi ombra, si deduce che conviene aumentare la disponibilità dell'ingrediente $\mathbf{I_1}$ che porta ad un maggiore incremento del profitto complessivo.

Si osservi che il fatto che ad un incremento pari a δ nel termine noto del primo vincolo corrisponda un incremento pari a 6.4δ nel valore ottimo della funzione obiettivo, è valido fin tanto che la variabile duale all'ottimo $u_1^\star$ associata al primo vincolo rimane pari al valore 6.4. Infatti, ovviamente la variazione del termine noto del vincolo corrispondente alla disponibilità dell'ingrediente $\mathbf{I_1}$ porta anche ad un cambiamento nella formulazione del problema duale: infatti un cambiamento nel termine noto di un vincolo primale corrisponde ad un cambiamento in un coefficiente della funzione obiettivo del problema duale. Pertanto c'è la possibilità che se la variazione è ampia, cambi il punto di ottimo del problema duale e quindi, in particolare, cambi il prezzo ombra $u_1^\star$ associato al primo vincolo. In questo caso, naturalmente, la variazione del valore del valore della funzione obiettivo all'ottimo non può essere piú proporzionale al valore 6.4 □

Quindi come visto nell'esempio, in generale, le variabili duali (i prezzi ombra) rappresentano l'effetto di cambiamenti nel termine noto dei vincoli. Si consideri, infatti un generico problema di Programmazione Lineare (in forma standard) (P), il suo duale (D) ed inoltre si consideri il problema (P_Δ) ottenuto modificando il termine noto da b a $b+\Delta$ (con $\Delta \in \mathbb{R}^m$) e il corrispondente problema duale (D_Δ):

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad (\mathrm{D}) \quad \begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

$$(\mathrm{P}_\Delta) \quad \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b + \Delta \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad\qquad (\mathrm{D}_\Delta) \quad \begin{cases} \max (b+\Delta)^T u \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

Siano $x^\star$ e $u^\star$ rispettivamente la soluzione ottima del problema (P) e del problema (D). Siano inoltre $x^\star(\Delta)$ e $u^\star(\Delta)$ rispettivamente la soluzione del problema (P_Δ) e del problema (D_Δ)

Dalle formulazioni di questi problemi si possono facilmente dedurre due osservazioni:

- la variazione del termine noto b nel problema primale si riflette in un cambiamento dei coefficienti della funzione obiettivo del problema duale;
- la regione ammissibile del problema (D) e del problema (D_Δ) sono uguali; da questo segue che se $u^\star \in \mathbb{R}^m$ è soluzione ottima del problema (D) allora $u^\star$ è ammissibile per il problema (D_Δ), ma non necessariamente è ottima per (D_Δ).

Inoltre per il Teorema della dualità forte applicato alla coppia primale–duale (P)–(D) deve essere

$$c^T x^\star = b^T u^\star, \tag{5.18}$$

mentre, sempre per il Teorema della dualità forte ma applicato alla coppia primale–duale (P_Δ)–(D_Δ) deve essere

$$c^T x^\star(\Delta) = (b+\Delta)^T u^\star(\Delta). \tag{5.19}$$

Se la soluzione ottima $x^\star$ soddisfa un'opportuna ipotesi (cioè che in $x^\star$ non ci siano più di n vincoli attivi) e se il vettore Δ ha componenti "sufficientemente" piccole allora si può dimostrare che:

$$u^\star(\Delta) = u^\star. \tag{5.20}$$

Utilizzando la (5.18), la (5.19) e la (5.20) si ha:

$$c^T x^\star(\Delta) = b^T u^\star + \Delta^T u^\star = c^T x^\star + \Delta^T u^\star, \tag{5.21}$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$c^T x^\star(\Delta) - c^T x^\star = \Delta_1 u_1^\star + \Delta_2 u_2^\star + \ldots + \Delta_m u_m^\star, \tag{5.22}$$

dove $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_m)^T$.

Dalla precedente relazione segue che una possibile interpretazione della variabile duale $u_i^\star$ è quella di essere un prezzo associato ad un incremento unitario del termine noto b_i. Per questa ragione le variabili duali $u_i^\star$, $i = 1, \ldots, m$, vengono denominate *prezzi ombra* o *costi marginali*. Sebbene la (5.20) (e di conseguenza la (5.22)) valga solamente sotto opportune ipotesi, in molte situazioni pratiche, le variabili duali $u_i^\star$, $i = 1, \ldots, m$, forniscono delle utili indicazioni su quale componente b_i variare per migliorare il valore ottimo della funzione obiettivo.

Si consideri, ora (come nell'Esempio 5.2.1) la variazione del termine noto di un solo vincolo che si ottiene prendendo $\Delta = \delta e_i$ (dove $e_i \in \mathbb{R}^m$ è il vettore con l'i-esima componente uguale a 1 e le altre componenti nulle). In questo caso, naturalmente ad una variazione del termine noto dell'i-esimo vincolo corrisponde una variazione del valore della funzione obiettivo pari a $\delta u_i^\star$. Nell'esempio precedente era stato infatti osservato come una variazione di δ effettuata nel termine noto del primo vincolo porta ad una variazione della funzione obiettivo pari a $u_1^\star \delta = 6.4\delta$. Si deve tuttavia ribadire un fatto molto importante: l'interpretazione delle variabili duali come prezzi ombra e quindi come strumento per valutare la variazione del valore della funzione obiettivo al variare del termine noto di un vincolo a partire da una soluzione ottima è vera *solamente per piccole variazioni* del termine noto; esiste cioè un intervallo entro il quale δ deve rimanere.

Esula dallo scopo di queste note la motivazione teorica dettagliata della validità dell'interpretazione data delle variabili duali, a partire da una soluzione ottima, come prezzi ombra rappresentanti i *valori marginali* dei termini noti dei vincoli solo per piccole perturbazioni di questi termini noti ed anche la determinazione dell'intervallo $[\delta_l, \delta_u]$ in cui può variare δ rimanendo valida tale l'interpretazione.

5.2.2 Il duale del problema di allocazione ottima di risorse

Si consideri nuovamente il semplice problema di allocazione ottima dell'Esempio 3.2.1 che è rappresentato dal seguente problema di Programazione Lineare:

$$\begin{cases} \max\,(7x_1 + 10x_2) \\ x_1 + x_2 \leq 750 \\ x_1 + 2x_2 \leq 1000 \\ x_2 \leq 400 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5.23}$$

Ricordiamo che le variabili x_1 e x_2 sono associate rispettivamente ai quantitativi di colorante **C1** e **C2** da produrre e che la produzione avviene utilizzando tre preparati base **P1**, **P2** e **P3** dei quali si ha una disponibilità massima rispettivamente pari a 750, 1000 e 400 ettogrammi. Supponiamo, ora di voler sottrarre preparati base dalla produzione dei coloranti per venderli direttamente. Indichiamo con u_1, u_2 e u_3 i prezzi associati rispettivamente alla vendita diretta di un ettogrammo di preparato base **P1**, **P2** e **P3**. Supponendo di destinare tutti i preparati alla vendita diretta, il profitto che si otterrebbe sarebbe

$$750u_1 + 1000u_2 + 400u_3. \tag{5.24}$$

Naturalmente si vorrà fare in modo che questa operazione di sottrazione dei preparati base dalla produzione dei coloranti e vendita diretta risulti economicamente conveniente e quindi mentre si vuole minimizzare l'espressione (5.24) affinché i prezzi di vendita risultino competitivi sul mercato, si imporrà che il profitto ottenuto vendendo direttamente i quantitativi di preparato base necessario per ottenere un litro di colorante sia maggiore o uguale del profitto associato alla vendita di un litro di colorante stesso; quindi, utilizzando i dati del problema riportati nella tabella dell'Esempio 3.2.1, si deve imporre che risulti

$$u_1 + u_2 \geq 7$$

per quanto riguarda il colorante **C1** e

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10$$

per quanto riguarda il colorante **C2** e naturalmente deve essere $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$ e $u_3 \geq 0$. Quindi il modello lineare che rappresenta l'operazione sopra descritta è il seguente:

$$\begin{cases} \min\,(750u_1 + 1000u_2 + 400u_3) \\ u_1 + u_2 \geq 7 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 10 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

Esaminando questo problema si vede immediatamente che esso rappresenta il *problema duale* del problema dato (5.23).

In generale, se si considera un generico problema di allocazione ottima di m risorse $\mathbf{R_i}$, $i = 1, \ldots, m$ con la possibilità di fabbricare n prodotti $\mathbf{P_j}$, $j = 1, \ldots, n$, come abbiamo già esaminato nel capitolo precedente si può formulare questo problema come

$$\begin{cases} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{5.25}$$

dove ricordiamo $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore avente per componenti i livelli di produzione di ciascuno dei prodotti, $c \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei profitti netti e $b \in \mathbb{R}^m$ il vettore delle disponibilità massima di ciascuna delle risorse.

Supponiamo ora di voler sottrarre risorse alla produzione per venderle direttamente e siano u_i, $i = 1, \ldots, m$ i prezzi unitari associati alla vendita dell'i-esima risorsa. Supponendo che per ciascuna risorsa si voglia destinare alla vendita una quantità pari alla disponibilità massima di quella risorsa, si ottiene un profitto pari a

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_m u_m.$$

Per rendere competitivi sul mercato i prezzi unitari u_i da assegnare alle risorse vendute direttamente, si vogliono scegliere i valori piú bassi possibile per le u_i, ma naturalmente, affinché questa operazione di vendita diretta in luogo della fabbricazione dei prodotti risulti conveniente si deve imporre che il profitto ottenuto vendendo direttamente le risorse necessarie per fabbricare un prodotto sia maggiore o uguale al profitto che si ricaverebbe dalla vendita del prodotto finito. Quindi per ogni prodotto, si deve imporre che valga

$$\begin{array}{cccc} a_{11}u_1+ & \dots & +a_{m1}u_m & \geq c_1 \\ a_{12}u_1+ & \dots & +a_{m2}u_m & \geq c_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}u_1+ & \dots & +a_{mn}u_m & \geq c_n \end{array}$$

con $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ e dove le quantità a_{ij} rappresentano la quantità di risorsa $\mathbf{R_i}$ necessaria per fabbricare una unità di prodotto $\mathbf{P_j}$.

Quindi il problema da risolvere può essere scritto nella forma

$$\begin{cases} \min b^T u \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

che è il problema duale del problema (5.25).

5.2.3 Il duale del problema di miscelazione

Si consideri il problema di miscelazione dell'Esempio 3.2.6 che è rappresentato dal seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min(400x_1 + 600x_2) \\ 140x_1 \geq 70 \\ 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ricordiamo che le variabili x_1 e x_2 rappresentano le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta che deve avere come requisito un contenuto minimo di 70 mg di vitamina C, 30 mg di sali minerali e 75 grammi di zucchero. Supponiamo ora che un'industria farmaceutica venda compresse di nutrimenti puri, cioè compresse di vitamina C, di sali minerali e di zucchero e che vuole immettere queste compresse su un ipotetico mercato come offerta sostitutiva al succo di frutta per l'acquisizione di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. Naturalmente questa industria farmaceutica vuole massimizzare il profitto ricavato dalla vendita delle compresse, ma al tempo stesso deve dare un prezzo alle compresse tale da essere competitiva. Siano allora u_1, u_2 e u_3 i prezzi di vendita rispettivamente di 1 mg di vitamina C, di 1 mg di sali minerali e di 1 grammo di zucchero; supponendo che la vendita di questi nutrimenti puri sia pari ai fabbisogni minimi (cioè a 70 mg di vitamina C, a 30 mg di sali minerali e a 75 grammi di zucchero), l'espressione del profitto dell'industria farmaceutica che dovrà essere massimizzata è

$$70u_1 + 30u_2 + 75u_3.$$

Affinché i prezzi di vendita dei componenti puri in compresse fissati dall'industria siano concorrenziali, si deve imporre che il costo unitario dei nutrimenti puri sia minore o uguale al prezzo che si dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente attraverso gli ingredienti del succo di frutta, cioè dalla polpa di frutta e dal dolcificante. Quindi si devono imporre i seguenti vincoli

$$\begin{aligned} 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 &\leq 400 \\ 10u_2 + 50u_3 &\leq 600. \end{aligned}$$

Inoltre dovrà essere $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_3 \geq 0$.

Quindi il problema complessivo formulato dall'industria farmaceutica è

$$\begin{cases} \max(70u_1 + 30u_2 + 75u_3) \\ 140u_1 + 20u_2 + 25u_3 \leq 400 \\ 10u_2 + 50u_3 \leq 600 \\ u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0 \end{cases}$$

che è il problema duale del problema di miscelazione considerato.

In generale, consideriamo un generico problema di miscelazione in cui si hanno n sostanze $\mathbf{S_j}$, $j = i, \ldots, n$ ciascuna delle quali contiene una quantità a_{ij} di componente utile $\mathbf{C_i}$, $i = 1, \ldots, m$. Come abbiamo già esaminato nel capitolo precedente un problema di miscelazione di questo tipo si può formulare come

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

dove ricordiamo che $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore avente per componenti le quantità di ciascuna sostanza da introdurre nella miscela, $c \in \mathbb{R}^n$ il vettore dei costi unitari delle sostanze, $b \in \mathbb{R}^m$ il vettore dei requisiti minimi di componenti utili da introdurre nella miscela, e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matrice i cui elementi sono le a_{ij}.

Supponiamo ora che un'industria sia in grado di fornire componenti utili allo stato puro e che voglia immettere sul mercato questi componenti utili e siano u_i, $i = 1, \ldots, m$ i prezzi unitari da assegnare a ciascuno di essi. Supponendo che la richiesta del mercato sia pari ai fabbisogni minimi della miscela, cioè per ciascun componente pari a b_i, il profitto totale dell'industria che vende i componenti utili allo stato puro è

$$b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_m u_m.$$

Inoltre, affinché i prezzi u_i assegnati dall'industria ai componenti puri siano concorrenziali, si deve imporre che il costo dei componenti puri sia minore o uguale al prezzo che dovrebbe pagare per avere la stessa quantità di componente ottenuto attraverso le sostanze e quindi deve valere

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leq c_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Inoltre si deve imporre $u_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Quindi il problema formulato si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \max b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

che è immediato verificare essere il problema duale del problema di miscelazione assegnato (5.26).