

Prova Scritta di Ricerca Operativa

Prof. Facchinei

02/07/2002

• **Cognome:**

• **Nome:**

1. (*Punti 7*) Enunciare e dimostrare il teorema dell'adualità debole (Scrivere esplicitamente a quale coppia primale/duale si fa riferimento).
2. (*Punti 6*)

Un magazzino deve pianificare l'acquisto di carta per stampanti per le esigenze di un dipartimento universitario nei mesi di Aprile, Maggio, Giugno e Luglio. Egli dispone, ovviamente, di un magazzino in cui riporre la carta comperata in eccesso in ciascun mese e quindi non utilizzata. In questo magazzino possono trovare posto, al più, 50 pacchi di carta da 500 fogli. La seguente tabella riporta, per ciascun mese, il numero di risme di carta che verranno presumibilmente consumate insieme al costo (in euro) di una risma (se acquistata in quel dato mese):

	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio
quantità	200	150	300	400
euro/risma	2.20	2.25	2.35	2.40

Sapendo che, per consentirne la pulizia, il magazzino deve essere vuoto o tra Maggio e Giugno o tra Giugno e Luglio, formulare un problema di PL che consenta di minimizzare i costi per l'acquisto della carta nei quattro mesi di interesse, rispettando tutti i vincoli del problema.

3. (*Punti 5*) Scrivere il duale del seguente problema di PL e le corrispondenti condizioni di complementarità.

$$\begin{aligned} \min x_1 + 20x_2 - 4x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &\leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

4. (Punti 4)

Risolvere graficamente il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

5. (Punti 6)

Un'azienda produce 4 oggetti diversi per il mercato, rispettando 3 vincoli relativi all'*orario*. In aggiunta vi sono 2 vincoli relativi alla *domanda* dei 4 prodotti, inoltre ad ogni unita' del prodotto pro_i $i = 1, \dots, 4$ e' associato un profitto dato da p_i .

Nell'ottica di massimizzare i profitti derivanti dalla produzione dei 4 oggetti, si costruiscano separatamente i file `.mod` e `.dat` rispondenti alle specifiche della formulazione di seguito data:

$$\begin{aligned} \max & \sum_{i \in PROD} p_i y_i \\ \text{s.t.} & By \leq b_1 \quad : \text{vincoli di orario} \\ & Ay = b_2 \quad : \text{vincoli sulla domanda} \\ & y \geq 0, \text{ intere} \end{aligned}$$

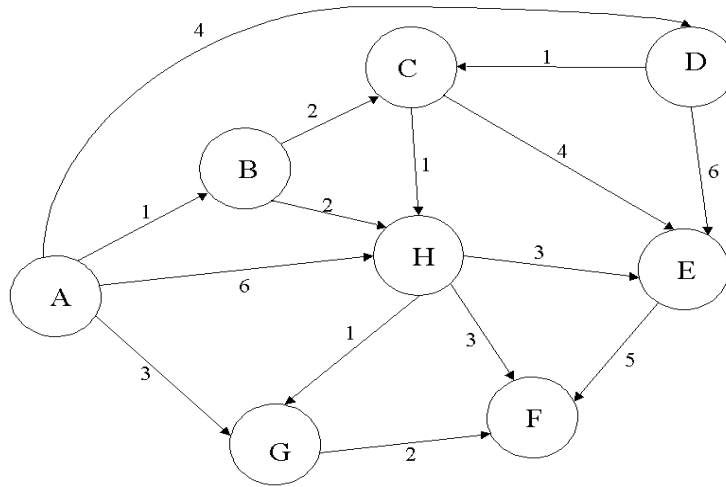
$$PROD = \{pro_1, pro_2, pro_3, pro_4\} \quad , \quad p = (1 \ 2 \ 4 \ 6)^T$$

$$b_1 = (9 \ 11 \ 30)^T \quad , \quad b_2 = (4 \ 8)^T$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1.5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. (Punti 5)

Numerare topologicamente i nodi del seguente grafo (illustrare i vari passi del procedimento con grafi successivi in cui vengono numerati i vari nodi e cancellati nodi e archi opportuni. Non limitarsi a fornire la numerazione topologica; tale risposta non verrebbe considerata sufficiente). Calcolare quindi i cammini minimi a partire dal nodo 1 a tutti gli altri nodi.



Prova Scritta di Ricerca Operativa

Prof. Facchinei

02/07/2002

• **Cognome:**

• **Nome:**

1. (*Punti 4*)

Definire:

- Un poliedro;
- Un segmento di estremi x e y ;
- Un vertice

Enunciare il Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare.

2. (*Punti 6*)

Per rifornire tre grosse città si devono costruire due centrali elettriche. Per costruire queste centrali elettriche sono disponibili quattro aree. A seconda della zona in cui vengono costruite, le centrali hanno un costo di costruzione ed una capacità di produzione massima diversi che sono descritti nella seguente tabella (i costi sono espressi in euro e le capacità in megawatt).

	zona 1	zona 2	zona 3	zona 4
costo di costruzione	80000	75000	85000	70000
capacità max.	7500	8000	6000	7000

Nella tabella che segue sono riportati l'esigenze minime (in megawatt) di ciascuna città e i costi di trasmissione (in euro per megawatt) di un megawatt da ciascuna delle possibili aree a ciascuna città.

	richiesta	zona 1	zona 2	zona 3	zona 4
città 1	1600	20	10	30	15
città 2	1500	10	5	20	30
città 3	1400	25	20	15	35

Si costruisca un modello di PL che permetta di determinare dove costruire le centrali e l'energia elettrica da produrre in tali centrali soddisfacendo le richieste e minimizzando i costi complessivi.

3. (Punti 5)

Risolvere graficamente il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min & 2x_1 - x_2 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Sia x^* la soluzione ottima trovata. Supponiamo ora di cambiare il problema alterando il coefficiente della variabile x_1 nella funzione obiettivo. Per quali valori di questo coefficiente il punto trovato rimane ottimo?

4. (Punti 5) Scrivere il duale del seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \max & x_1 + 20x_2 - 4x_3 \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 2 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 0 \\ & x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Enunciare il Teorema della Dualità Forte.

5. (Punti 6)

Un'azienda produce 4 oggetti diversi per il mercato, rispettando 3 vincoli relativi all'*orario*. In aggiunta vi sono 2 vincoli relativi alla *domanda* dei 4 prodotti, inoltre ad ogni unità del prodotto pro_i $i = 1, \dots, 4$ è associato un profitto dato da p_i .

Nell'ottica di massimizzare i profitti derivanti dalla produzione dei 4 oggetti, si costruiscano separatamente i file `.mod` e `.dat` rispondenti alle specifiche della formulazione di seguito data:

$$\begin{aligned} \max & \sum_{i \in PROD} p_i y_i \\ \text{s.t.} & By \leq b_1 && : \text{vincoli di orario} \\ & Ay = b_2 && : \text{vincoli sulla domanda} \\ & y \geq 0, && \text{intere} \end{aligned}$$

$$PROD = \{pro_1, pro_2, pro_3, pro_4\} \quad , \quad p = (1 \ 2 \ 4 \ 6)^T$$

$$b_1 = (9 \ 11 \ 30)^T \quad , \quad b_2 = (4 \ 8)^T$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1.5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. (*Punti 7*)

Si deve eseguire un progetto costituito dalle attività A ··· I, di cui di seguito si riportano le durate:

(A,3), (B,4), (C,3), (D,1), (E,5), (F,7), (G,3), (H,8), (I,2)

e le precedenze:

A < B, C; B < D, E; C < D,F; D,F < G; E < I; G < H,I.

Disegnare il diagramma reticolare associato al progetto e calcolarne il tempo di completamento.

Prova Scritta di Ricerca Operativa

Prof. Facchinei

02/07/2002

• **Cognome:**

• **Nome:**

1. (*Punti 7*) Dire cos'è una *numerazione topologica* dei nodi di un grafo orientato. Dimostrare poi che un grafo orientato ammette una numerazione topologica dei suoi nodi se e solo se non contiene cicli orientati.

2. (*Punti 6*)

Un comune ha il problema di rifornire di acqua tre paesi. Per risolvere questo problema si è pensato di accumulare dell'acqua in due grossi serbatoi ciascuno costruito in una zona ricca di acqua e, quindi, di rifornire i tre paesi trasportando l'acqua dai serbatoi. Il comune ha a disposizione quattro zone dove costruire i due serbatoi. A seconda della zona in cui vengono costruiti, i serbatoi hanno un costo di costruzione ed una capacità massima diversi che sono descritti nella seguente tabella (i costi sono espressi in euro e le capacità in ettolitri).

	zona 1	zona 2	zona 3	zona 4
costo di costruzione	30000	25000	35000	40000
capacità max.	2800	2500	30000	37000

Nella tabella che segue sono riportati il quantitativo minimo di acqua (in ettolitri) richiesto da ciascun paese e i costi di trasporto (in euro per ettolitro) di un ettolitro di acqua da ciascuna delle possibili aree a ciascun paese.

	richiesta	zona 1	zona 2	zona 3	zona 4
paese 1	600	50	70	30	40
paese 2	700	20	55	25	35
paese 3	500	35	45	15	45

Si costruisca un modello di PL che permetta di determinare dove costruire i serbatoi ed il quantitativo d'acqua d'accumularci soddisfacendo le richieste e minimizzando i costi complessivi.

3. (*Punti 5*) Scrivere il problema duale del seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min x_1 - 5x_2 + x_3 - 4x_4 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 \geq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 - x_3 - x_4 \leq 3 \\ x_2 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Enunciare il Teorema della Dualità Debole.

4. (*Punti 4*)

Risolvere graficamente il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max & 2x_1 + x_2 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 4x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

5. (*Punti 6*)

Un agricoltore deve assumere braccianti per la lavorazione in 5 campi diversi di pomodori; allo scopo egli deve rispettare 2 vincoli di natura *sindacale* e 3 vincoli relativi alla quantità minima (Kg) di *pomodori da raccogliere*. Per ogni chilogrammo di pomodori del tipo pom_j $j = 1, \dots, 5$ gli viene pagato un prezzo pari a p_j .

Volendo massimizzare i profitti derivanti dalla vendita dei 5 tipi di pomodori, si costruiscano separatamente i file `.mod` e `.dat` rispondenti alle specifiche della formulazione di seguito data:

$$\begin{aligned} \max & \sum_{j \in POMO} p_j x_j \\ \text{s.t.} & Ax \leq d_1 \quad : \text{vincoli sindacali} \\ & Bx = d_2 \quad : \text{vincoli quantità minima} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$POMO = \{pom_1, pom_2, pom_3, pom_4, pom_5\} \quad , \quad p = (3 \ 2 \ 5 \ 3 \ 4)^T$$

$$d_1 = (6 \ 15)^T \quad , \quad d_2 = (13 \ 5 \ 9)^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2.3 & 2 & 4 & 2.5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1.5 & 2.4 & 1 & 3.1 \end{pmatrix}$$

6. (*Punti 5*)

Si deve eseguire un progetto costituito dalle attività A ... I, di cui di seguito si riportano le durate:

(A,3), (B,4), (C,3), (D,1), (E,5), (F,7), (G,3), (H,8), (I,2)

e le precedenze:

A < B, C; B < D, E; C < D,F; D,F < G; E < I; G < H,I.

Disegnare il diagramma reticolare associato al progetto e numerarlo topologicamente.