Università di Roma "La Sapienza"

Ricerca Operativa
Appunti dalle lezioni
Anno Accademico 2001-2002

Francisco Facchinei

(Versione provvisoria)

Le dispense ed ulteriori informazioni sul corso sono disponibili all'indirizzo:

http://www.dis.uniroma1.it/~facchinei/didatticaf.html

7 Giugno 2002

Introduzione

La Ricerca Operativa è una disciplina relativamente giovane. Il termine *Ricerca Operativa* è stato coniato in ambito militare verso la fine degli anni '30 e deriva dal termine inglese *"Operational Research"*, ovvero la "ricerca sulle operazioni (militari)".

La Ricerca Operativa (di seguito indicata con l'acronimo *RO*) si occupa dello sviluppo e dell'applicazione di metodi quantitativi per la soluzione di problemi di decisione che si presentano nella gestione di imprese e organizzazioni.

Quando la complessità dei sistemi era relativamente contenuta, e la quantità di dati disponibili estremamente limitata, il personale esperto era sufficiente a prendere le decisioni necessarie alla conduzione dell'impresa.

La crescente complessità dei sistemi aziendali e l'integrazione internazionale delle imprese, congiuntamente all'enorme quantità di dati messa a disposizione dall'informatizzazione capillare ha reso indispensabile l'utilizzo di strumenti automatici di decisione che attraverso la modellazione matematica permettano la soluzione di problemi di grandi dimensioni.

La RO, quindi, è caratterizzata dall'uso di modelli matematici definiti e risolti al fine di fornire indicazioni ai "decisori" nell'atto della scelta. Non a caso, la RO è anche nota come *management science*, e cioè la Scienza della Gestione, definizione che ne sintetizza finalità e ambizioni.

Breve storia della Ricerca Operativa

Il termine Ricerca Operativa, si è detto, è legato alle prime applicazioni della RO per aumentare l'efficienza di operazioni militari della Seconda Guerra Mondiale. Tuttavia esistono esempi importanti di anticipazione dei metodi della RO in anni più lontani; il più famoso risale a F. Taylor che nel 1885 elaborò uno studio sui metodi di produzione; prima ancora, nel 1776, G. Monge aveva studiato un problema di trasporti. Tuttavia la nascita della RO è legata agli studi che negli anni immediatamente precedenti alla Seconda Guerra Mondiale vennero condotti in Gran Bretagna per risolvere problemi strategici e tattici in operazioni militari. Più in particolare questi studi erano legati all'uso efficiente di un nuovo strumento di difesa: il radar. Infatti nel 1937 la Royal Air Force iniziò degli esperimenti di un sistema di controllo della difesa aerea basato sull'uso di una stazione radar situata a Bawdsey Research Station, nella costa est; già dai primi esperimenti si resero conto che era molto difficile gestire efficientemente le informazioni provenienti dal radar. Nel luglio 1938 furono compiuti altri esperimenti con l'aggiunta di quattro stazioni radar lungo la costa nella speranza che il sistema di controllo migliorasse sia in copertura sia in efficienza; invece non fu così ; dai nuovi esperimenti emersero seri problemi: c'era la necessità di coordinare e correlare le tante informazioni, spesso anche in conflitto tra di loro, che venivano ricevute dalle stazioni radar aggiunte. Nell'imminenza della Guerra si rese necessario tentare qualche nuovo approccio; perciò il sovrintendente della Bawdsey Research Station propose di sviluppare un programma di ricerca che riguardasse gli aspetti *operativi* del sistema e non più solamente quelli prettamente tecnici che erano da considerare soddisfacenti. Il termine *"Operational Research"* – Ricerca nelle operazioni (militari) – fu coniato per descrivere questa nuova branca delle scienze applicate. Fu quindi selezionato un gruppo di scienziati di vari discipline per costituire un "OR team"; il progetto fu diretto dal comandante in capo della Royal Air Force, Air Chief Marshal Sir Hugh Dowding. Nell'estate del 1939 la Gran Bretagna effettuò l'ultima esercitazione pre-bellica dove si evidenziò un notevole miglioramento nelle operazioni di difesa aerea grazie al contributo del gruppo di scienziati. Nacque quindi una vera e propria sezione che più tardi, nel 1941, prese il nome formale di "Operational Research Section". Durante il conflitto mondiale ci furono importanti contributi strategici di questa sezione che permisero di salvare piloti e aerei impegnati nel conflitto. Nonostante gli scopi bellici, anche se di difesa, del progetto, per la prima volta in questa occasione si ebbe una convergenza di scienziati di diverse discipline con l'obiettivo di determinare la più efficiente utilizzazione di risorse limitate usando tecniche quantitative.

Al termine della guerra, alcuni degli scienziati coinvolti nel progetto formarono nuclei di ricercatori per lo sviluppo post bellico e la loro attività si estese a campi diversi da quello militare; in particolare, con l'espandersi delle iniziative industriali e con l'avvento dei computer che sono uno strumento essenziale per la risoluzione dei problemi, c'è stata un'espansione dell'utilizzo della RO all'interno di diverse realtà applicative.

Dagli anni '60 in poi le applicazioni della RO hanno avuto diffusione crescente, inizialmente nell'ambito di grandi gruppi industriali e succesivamente, grazie anche alla disponibilità di grandi potenze di calcolo a costi contenuti, in quasi ogni settore industriale, nei servizi e nelle amministrazioni pubbliche.

La Ricerca Operativa oggi

Ai nostri giorni la rilevanza applicativa delle tecniche della RO è riconosciuta e apprezzata in ambito industriale. Negli ultimi cinque anni il numero di addetti del settore è infatti cresciuto di un fattore 100. Contestualmente, si è allargata la richiesta di esperti di RO nelle imprese manifatturiere e di servizi: un laureato, esperto di tecniche della RO può ragionevolmente aspirare, per esempio, a ricoprire incarichi di responsabilità nelle industrie manifatturiere, nella assicurazioni, nel marketing, nelle società di consulenza aziendale, nella pianificazione e, sempre di più, nelle telecomunicazioni.

Alcuni esempi di problemi possono essere risolti per mezzo delle tecniche della RO sono i seguenti:

- *Finanza e Investimenti*;
  si vuole rispondere a domande del tipo: quanto dobbiamo investire, e come? Dove rimediare i capitali necessari? Quanto ci costerà? Alcuni esempi sono:
  - *Selezione degli investimenti*:
    si tratta di scegliere, fra un vasto insieme di alternative di investimento, quali attivare e quali no in presenza di vincoli di budget e con l'obiettivo di massimizzare i ricavi.
  - *Scelta del portafoglio*;
    consiste nel decidere in quali titoli e con quali quote investire i nostri capitali in modo da massimizzare il ricavo atteso, oppure minimizzare il rischio, etc.
  - *Determinazione del prezzo di derivati finanziari*;
    si vuole determinare il prezzo di un prodotto derivato finanziario (per esempio di un'*opzione* o di un *future*) in funzione del tempo e dell'andamento del titolo sottostaste.
- *pianificazione della produzione*;
  come assegnare la forza lavoro alle varie attività della nostra impresa? Su quali macchine e per quanto tempo ci conviene effettuare i nostri processi?

  Si tratta di pianificare i livelli di produzione e/o l'utilizzazione di risorse; si hanno spesso problemi di *allocazione ottima di risorse* cioè problemi riguardanti la distribuzione di risorse limitate tra alternative concorrenti in modo da minimizzare il costo complessivo o massimizzare il guadagno totale; tali risorse possono essere materie prime, manodopera, tempi di lavoro su macchine, capitali investiti.

- *gestione ottima delle scorte*;
  si tratta di determinare i livelli di produzione e di scorte nella gestione di materiali grezzi, prodotti in lavorazione etc.; quando e quanto conviene riordinare materiali o beni in modo da ottenere il miglior compromesso fra costi di riordino e di produzione/acquisto e costi di immagazzinamento. Conviene, cioè, ordinare o produrre più spesso minori quantità per far fronte alla domanda corrente, oppure ordinare/produrre maggiori quantità e lasciarle in magazzino per soddisfare anche la domanda futura?

- *localizzazione e dimensionamento di impianti*;
  dove ci conviene costruire le stazioni di base di una rete GSM/UMTS per coprire efficacemente il territorio e il traffico, e con che potenza dovranno trasmettere? Quanti depositi di un'impresa di distribuzione alimentare costruire e dove localizzarli per servire i negozi a dettaglio in un'area d'interesse? Dove costruire degli ospedali (o scuole o stazioni dei vigili del fuoco) in modo da ottimizzare il servizio fornito?

  In senso lato, si tratta di problemi in cui si deve decidere dove istallare "impianti di produzione" in modo da "rifornire" in modo ottimale aree distribuite su un territorio.

- *progetto di reti di telecomunicazione*;
  si tratta di definire i collegamenti e dimensionare le capacità di una rete di telecomunicazione, di trasmissione dati, etc., in modo da garantire il traffico tra le varie origini e destinazioni e minimizzare il costo complessivo; ad esempio, per instradare le comunicazioni fra Roma e Venezia, conviene costruire una nuova linea ad alta velocità in fibra ottica fra Firenze e Bologna oppure istallare un ponte radio a larga banda?

- *assegnazione di frequenze di trasmissione*;
  quali frequenze (prese da una banda limitata) devo assegnare a una rete di trasmettitori radio-televisivi in modo da minimizzare le interferenze reciproche o massimizzare la copertura del territorio?

- *sequenziamento*;
  quali processo o operazione effettuare prima e quali dopo? Per esempio, come sequenziare i treni sulla rete in modo da evitare conflitti sulle tratte e minimizzare i tempi morti, le attese alle stazioni, etc.?

- *project planning*;
  come sequenziare le molteplici attività di un progetto? Quanto durerà il progetto? Come devono essere gestite le risorse?

- *allocazione ottima di componenti elettronici* (VLSI design);
  come disegnare una piastra madre in modo da minimizzare le lunghezze dei percorsi seguiti dai segnali elettrici?

- *determinazione dei turni del personale*;
  si tratta, ad esempio, di assegnare ai convogli il personale viaggiante sui treni (conducenti, bigliettai, etc.) in modo da minimizzare il numero di viaggi "a vuoto" (necessari per riportare il personale alla loro sede). Un problema analogo si presenta nell'assegnazione di equipaggi (piloti, hostess, stewart) a voli.

- *manutenzione di beni*;
  cioè il problema di decidere quando e se effettuare la manutenzione di alcuni beni soggetti ad usura, in modo da minimizzare il costo complessivo.

- *istradamento di veicoli*;
  quali percorsi devono seguire i veicoli di una flotta di automezzi per, ad esempio, raccogliere l'immondizia, o rifornire una rete di negozi, in modo da minimizzare le distanze complessive percorse?

- *studi sulla struttura del DNA*;
  come assegnare sequenze a geni minimizzando la probabilità dell'errore sperimentale? Come determinare un albero filogenetico massimizzando la verosimiglianza?
- *progettazione di forme ottime*;
  che forma deve avere una macchina in modo da presentare meno resistenza possibile all'aria? Che profilo deve evere l'ala di un aereo in modo da massimizzare la portanza?
- *calcolo delle traiettorie ottime*;
  qual è la traiettoria che permette ad un veicolo spaziale di arrivare sulla luna e tornare usando la quantità minima di carburante?
- *ricostruzione di immagini*;
  come si possono visualizzare le informazioni fornite, per esempio, da una TAC in modo da renderle più leggibili possibili per il medico?
- *progettazione strutturale* ;
  qual è il progetto di un ponte o di un grattacielo che resiste meglio a venti molto forti o alle sollecitazioni derivanti da un terremoto?

Questa lista, lungi dall'essere esaustiva, serve a mettere in evidenza le potenzialità degli strumenti della RO nella risoluzione di problemi applicativi complessi e disparati.

In Italia la penetrazione della RO è stata piuttosto lenta nonostante l'inadeguatezza delle tecniche utilizzate in rapporto a problemi di complessità crescenti. La situazione è rovesciata negli Stati Uniti e nell'Europa Centro-Settentrionale ove la crescita del settore è stata formidabile. Le ragioni del ritardo sono in primo luogo culturali: mancanza di conoscenze approfondite da parte delle aziende, insuffcente disseminazione dei risultati da parte dell'accademia. Lentamente, questa situazione va modificandosi anche in Italia, e la sensibilità delle aziende è fortemente cresciuta negli ultimi due-tre anni. In particolare ci si è resi conto che l'informatizzazione capillare e l'accresciuta potenza di calcolo non sono sufficienti a risolvere i problemi dell'organizzazione aziendale in modo ottimale.

A confermare questo asserto si consideri il seguente, illuminante esempio (dovuto a G. B. Dantzig): si supponga di essere a capo di un'azienda che impiega 70 dipendenti e deve assegnare ciascuno di essi a 70 differenti mansioni; poiché le capacità lavorative di ogni singolo dipendente sono diverse, non è indifferente per l'azienda come effettuare l'assegnamento. Naturalmente si deve fare in modo che ciascun dipendente sia assegnato ad una sola mansione e che ciascuna mansione sia svolta esattamente da un dipendente. Il problema consiste nel confrontare le 70! possibilità che ci sono per selezionare quella migliore nel senso che permetta di ottenere il maggiore utile per l'azienda. Le possibilità sono un numero molto grande, più grande di 10^{100}. Ora si supponga di disporre di un calcolatore capace di effettuare un milione di calcoli al secondo e che sia in funzione dal tempo del big bang, 15 milioni di anni fà; avrebbe questo calcolatore oggi nell'anno 2000 esaminato tutte le 70! combinazioni possibili ? La risposta è no. Supponiamo allora di disporre di un calcolatore che possa effettuare un bilione di assegnamenti per ogni nano secondo; la risposta sarebbe ancora no. Supponiamo allora di riempire la superficie terrestre di calcolatori di questo tipo che lavorano in parallelo; la risposta sarebbe ancora no. Si dovrebbe disporre in verità di 10^{40} terre ciascuna ricoperta di calcolatori di questo tipo, in funzione dal tempo del big bang fino a quando il sole si raffredderà.

Da questo esempio facile da enunciare si deduce come in certe situazioni sia assolutamente impossibile esaminare tutti i casi possibili per determinare qual è il migliore. Per questo, prima dell'avvento della RO, l'unica possibilità era affidarsi al buon senso di persone guidate dall'esperienza che stabilivano regole "ad hoc" di base che dovevano essere seguite per risolvere i problemi (*"ad hoc" ground-rule approach*).

A questo tipo di approccio si contrappone la RO, il cui contributo centrale consiste nell'introduzione del cosiddetto *approccio modellistico-ottimizzatorio* per la soluzione di un problema di decisione. In questo approccio si organizza l'analisi di un problema reale in due fasi:

- la rappresentazione del problema attraverso un *modello matematico* che ne astragga gli aspetti essenziali e che schematizzi le interrelazioni esistenti tra i diversi aspetti del fenomeno che si sta studiando;
- lo sviluppo di *metodi matematici efficienti* (algoritmi di soluzione) per determinare una soluzione ottima del problema o una sua buona approssimazione.

Naturalmente, per costruire correttamente un modello matematico-ottimizzatorio che rappresenti un particolare fenomeno, si devono individuare i parametri di controllo significativi e un criterio per la valutazione della qualità della soluzione. La determinazione del modello è un'attività complessa e non completamente formalizzabile, che deve far ricorso da una parte a una conoscenza approfondita delle caratteristiche del problema in esame e dall'altra a strumenti che provengono da diverse branche della matematica. Una volta determinato il modello corretto, la RO si occupa di fornire una procedura esplicita per determinare una soluzione di un problema; tale procedura può essere rappresentata da metodi matematici analitici o, come più spesso accade, da metodi numerici che determinano la soluzione del problema mediante specifici algoritmi di calcolo. Da quanto detto si può capire come la RO sia una metodologia tipicamente interdisciplinare, applicabile nei più svariati contesti e come proprio dagli stimoli provenienti da campi anche molto distanti tra di loro tragga una delle principlai ragioni della sua attuale vitalità.

Capitolo 1

I Modelli della Ricerca Operativa

1.1 L'approccio modellistico

Il termine *modello* è di solito usato per indicare una costruzione artificiale realizzata per evidenziare proprietà specifiche di oggetti reali. Esistono modelli concreti (come ad esempio i prototipi di aerei o automobili), ma più spesso, come nella Ricerca Operativa, si considerano *modelli astratti* cioè *modelli matematici* che usano il simbolismo dell'algebra per mettere in evidenza le relazioni principali dell'oggetto che deve essere modellato. I modelli di cui si tratterà in seguito sono quindi modelli matematici, e sono costituiti da un insieme di relazioni che descrivono in modo semplificato, ma rigoroso, uno o più fenomeni del mondo reale. La nozione di modello matematico per rappresentare il mondo reale non è certo nuova: già Pitagora nel IV secolo a.C. tentava di costruire un modello matematico dell'Universo. L'interesse per la modellistica matematica è notevolmente cresciuto e attualmente si confida che attraverso modelli matematici sia possibile rappresentare molteplici aspetti del mondo reale e studiarne le proprietà. Ciò ha portato ad un enorme sviluppo delle applicazioni della modellistica matematica anche al di fuori delle tradizionali applicazioni alle scienze fisiche. Si è così avuta di fatto una vasta utilizzazione di modelli matematici in settori lontani dagli ambiti più tradizionali come, ad esempio, le scienze sociali, la biologia, le scienze ambientali, la psicologia. Come esempi concreti, si pensi agli studi sulla dinamica della popolazione, sulla diffusione delle epidemie, sul risanamento ambientale. Questa notevole diffusione della modellistica matematica è anche dovuta al fatto che l'evoluzione di un modello matematico può essere rapidamente studiata grazie all'uso di moderni calcolatori elettronici.

È evidente come in molti casi le situazioni rappresentate da un modello sono molto complesse e alcune volte influenzate da fenomeni di natura aleatoria; per questa ragione, sono state definite diverse classi di modelli matematici: *modelli stocastici* che considerano grandezze che possono essere influenzate da fenomeni aleatori e *modelli deterministici* che considerano grandezze esatte; inoltre a seconda che le interazioni tra le grandezze sono immediate o distribuite nel tempo, si parla di *modelli statici* e di *modelli dinamici*.

L'approccio modellistico per risolvere un problema di decisione o, più in generale, l'impiego di metodi matematici per la soluzione di problemi applicativi, viene di solito realizzato attraverso diverse fasi. Tali fasi possono essere schematizzate nel seguente modo:

- **Analisi del problema**
- **Costruzione del modello**
- **Analisi del modello**
- **Soluzione numerica**
- **Validazione del modello**

La prima fase consiste nell'*analisi della struttura del problema* per individuare i legami logico-funzionali e gli obiettivi.

Nella succesiva fase di *costruzione del modello*, chiamata anche *formulazione*, si descrivono in termini matematici le caratteristiche principali del problema; questa fase di costruzione verrà descritta in dettaglio nel seguito.

Segue l'*analisi del modello* che prevede la deduzione per via analitica, in riferimento a determinate classi di problemi, di alcune importanti proprietà; le principali sono:

– *esistenza* della soluzione ottima;

– *condizioni di ottimalità*, cioè una caratterizzazione analitica della soluzione ottima;

– *stabilità* delle soluzioni al variare dei dati o di eventuali parametri presenti.

La successiva fase di *soluzione* avviene mediante opportuni algoritmi di calcolo e la soluzione numerica così ottenuta deve poi essere valutata praticamente; eventuali scarti devono essere rilevati e utilizzati per la costruzione di modelli più affidabili. Tale "validazione" del modello può avvenire attraverso una *verifica sperimentale* oppure con metodi di *simulazione*. La definizione di un modello si configura quindi come un processo di raffinamento iterativo, che può essere schematizzato come rappresentato in Figura 1.1.

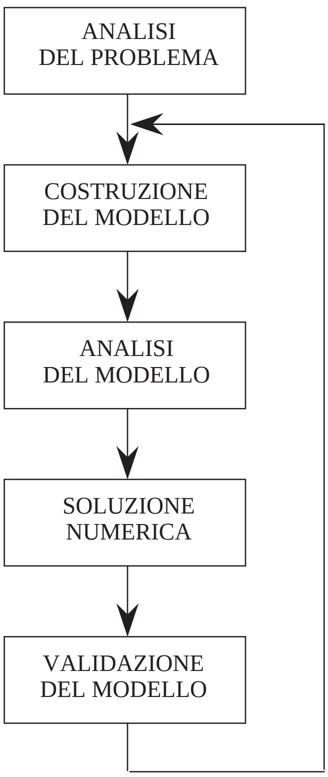

Figura 1.1: Fasi dell'approccio modellistico

Costruzione di un modello matematico
Nella fase di costruzione del modello matematico si deve fornire una descrizione formalizzata del problema di decisione facendo uso del linguaggio della matematica. Si dovrà cercare, quindi, una corrispondenza tra relazioni del mondo reale (relazioni tecnologiche, leggi fisiche, vincoli di mercato, etc.) e relazioni matematiche (equazioni, disequazioni, dipendenze logiche, etc.).

$$\boxed{\textit{relazioni del mondo reale}} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\textit{relazioni matematiche}}$$

La costruzione di un modello richiede valutazioni e scelte non facilmente codificabili in un procedimento standard. In particolare, per la costruzione di modelli soddisfacente è necessaria una conoscenza approfondita dell'applicazione d'interesse e dei metodi matematici di soluzione. La conoscenza dell'applicazione assicura che il modello sia soddisfacente e risponda alle domande concrete che l'utilizzatore gli porrà. La conoscenza dei metodi permette la definizione di modelli "risolvibili", cioé per i quali è possibile (al termine del processo di modellazione) la determinazione di soluzioni di buona "qualità".

È importante ribadire che un modello è definito per mezzo delle relazioni che lo costituiscono ed è quindi necessario che tali relazioni siano il più possibile indipendenti dai dati introdotti nel modello; questo perché uno stesso modello deve poter essere usato in differenti occasioni con dati (cioè costi, disponibilità di risorse, limiti tecnologici, etc.) diversi. Lo studio di questo aspetto, come già detto, rientra nella fase di analisi del modello sotto il nome di analisi della stabilità del modello rispetto ai dati introdotti.

Vantaggi dell'approccio modellistico
Esistono diverse ragioni per adottare l'approccio modellistico per la soluzione di problemi: si riassumono di seguito le principali.

- *Possibilità di risolvere matematicamente il problema.*

  Grazie al modello è possibile analizzare matematicamente il problema ed ottenere così una soluzione che, soprattutto in riferimento a scopi di pianificazione, permette di adottare strategie che da una sola analisi strutturale del problema non apparirebbero evidenti o che a volte potrebbero essere perfino controintuitive.
- *Maggiore comprensione del problema.*

  Il modello è una rappresentazione semplificata del problema e spesso la sua costruzione consente di individuare proprietà strutturali del problema che altrimenti non sarebbero affatto evidenti.
- *Deduzione analitica di importanti proprietà.*

  Nella fase di analisi del modello è possibile dedurre per via analitica alcune importanti proprietà del problema sulla base dei risultati disponibili per la classe di problemi a cui si fa riferimento.
- *Possibilità di simulazioni.*

  Con un modello è possibile effettuare esperimenti che spesso non è possibile effettuare direttamente nella realtà; ad esempio, l'uso di un modello consente di studiare gli effetti dell'adozione di una particolare misura economica in un paese senza la necessità di sperimentarla direttamente.

Critiche all'approccio modellistico
Le principali critiche all'approccio modellistico possono essere sintetizzate nei seguenti due punti:

- Impossibilità di quantificare soddisfacentemente con opportuni valori numerici alcuni dati richiesti dal modello; questo accade, ad esempio, nel tentativo di quantificare con un costo o con un profitto alcuni valori sociali soprattutto in relazione a scopi di pianificazione.

– La qualità delle risposte che un modello produce potrebbero dipendere profondamente dall'accuratezza dei dati introdotti.

La qualità delle risposte fornite dal modello dipende dall'accuratezza della sua definizione: la fase di validazione é cruciale per valutare la soluzione numerica ottenuta e completare il modello introducendo elementi trascurati in una prima fase.

1.2 Modelli di Ottimizzazione

In questa sezione ci occuperemo più nel dettaglio di quei particolari modelli matematici noti come *Modelli di Ottimizzazione* che rivestono un ruolo centrale nella RO. In termini generali, data una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, ed $S \subseteq \mathbb{R}^n$, un *problema di Ottimizzazione* può essere formulato nella forma[1]

$$\begin{cases} \min f(x) \\ x \in S. \end{cases} \tag{PO}$$

Quindi un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione f tra i punti dell'insieme S. I problemi di ottimizzazione sono spesso denominati, con terminologia equivalente, problemi di Programmazione Matematica.

La funzione f viene chiamata *funzione obiettivo* e l'insieme S *insieme ammissibile* cioè l'insieme delle possibili soluzioni del problema. Un punto $x \in S$ si chiama *soluzione ammissibile.*

L'insieme ammissibile S è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e quindi $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ è una variabile vettoriale n-dimensionale e la funzione obiettivo f è una funzione di n variabili reali $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Si riportano di seguito alcune definizioni fondamentali riguardanti i problemi di Ottimizzazione.

Definizione 1.2.1 *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice* inammissibile *se $S = \emptyset$, cioè se non esistono soluzioni ammissibili.*

Definizione 1.2.2 *Il problema di ottimizzazione (PO) si dice* illimitato (inferiormente) *se comunque scelto un valore $M > 0$ esiste un punto $x \in S$ tale che $f(x) < -M$.*

Un esempio di PO illimitato inferiormente è dato da $f(x) = x^3$ e $S = \mathbb{R}$. Infatti, al tendere di x a $-\infty$ la funzione obiettivo tende anch'essa a $-\infty$. Notiamo che se, con la stessa funzione obiettivo, si cambia l'insieme S, e si pone $S = \{x : x \geq 0\}$, il problema non è più illimitato inferiormente.

Definizione 1.2.3 *Si dice che il problema di ottimizzazione (PO)* ammette soluzione ottima (finita) *se esiste un $x^\star \in S$ tale che risulti $f(x^\star) \leq f(x)$ per ogni $x \in S$. Il punto $x^\star$ è detto* soluzione ottima *o* minimo globale *e il corrispondente valore $f(x^\star)$ di dice* valore ottimo.

Per esempio, se si pone $f = x^2$ e $S = \mathbb{R}$, l'ottimo è l'origine, e il corrispondente valore ottimo è zero. Se si prende $S = \{x : x \geq 2\}$, l'ottimo è 2 e il valore ottimo 4.

All'interno dei problemi di Ottimizzazione si possono distinguere le seguenti importanti classi di problemi:

[1] Si parlerà indifferentemente di problemi di massimo o di minimo in quanto vale $\min\limits_{x \in S} f(x) = -\max\limits_{x \in S}(-f(x))$.

- **Problemi di Ottimizzazione Continua.**
  Le variabili possono assumere tutti i valori reali ($x \in \mathbb{R}^n$); ed inoltre si parla di problemi di ottimizzazione continua
  - *vincolata* se $S \subset \mathbb{R}^n$
  - *non vincolata* se $S = \mathbb{R}^n$.
- **Problemi di Ottimizzazione Discreta.**
  Le variabili sono vincolate ad essere numeri interi ($x \in \mathbf{Z}^n$); si possono distinguere all'interno di questa classe di problemi altre due classi:
  - *programmazione a numeri interi* se $S \subseteq \mathbf{Z}^n$
  - *ottimizzazione booleana* se $S \subseteq \{0, 1\}^n$.
- **Problemi misti.**
  Solo alcune delle variabili sono vincolate ad essere intere.

Di solito l'insieme ammissibile S viene descritto da una numero finito di diseguaglianze del tipo $g(x) \leq b$, dove g è una funzione definita su $\mathbb{R}^n$ a valori reali e $b \in \mathbb{R}$. Cioè, formalmente, date m funzioni $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ ed m scalari $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ si esprime S nella forma

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \ \mid \ g_1(x) \leq b_1, \quad g_2(x) \leq b_2, \quad \ldots \quad , \quad g_m(x) \leq b_m\}.$$

Ogni diseguaglianza $g_i(x) \leq b_i$ prende nome di *vincolo* e l'insieme ammissible è quindi formato da tutti quei punti $x \in \mathbb{R}^n$ che sono soluzione del sistema di diseguaglianze

$$\left\{ \begin{array}{ccc} g_1(x) & \leq & b_1 \\ g_2(x) & \leq & b_2 \\ g_3(x) & \leq & b_3 \\ & \vdots & \\ g_m(x) & \leq & b_m \end{array} \right.$$

Osservazione 1.2.4 In questa formulazione dell'insieme S si sono utilizzati vincoli di diseguaglianza nella forma di minore o uguale, ma è chiaro che questa notazione include i casi in cui i vincoli sono espressi con vincoli di disuguaglianza nella forma di maggiore o uguale e vincoli di uguaglianza; infatti si può sempre trasformare un vincolo di maggiore o uguale del tipo $g(x) \geq b$ in un vincolo di minore o uguale semplicemente riscrivendolo nella forma $-g(x) \leq -b$. Inoltre un vincolo di uguaglianza $g(x) = b$ può essere riscritto nella forma equivalente delle due diseguaglianze $g(x) \leq b$ e $-g(x) \leq -b$.

Quindi si può riscrivere il problema di ottimizzazione (PO) nella forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \\ g_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array} \right. \tag{1.1}$$

I punti dell'insieme ammissibile di questo tipo di problemi sono quelli per i quali tutti i vincoli sono soddisfatti cioè tutti quei punti x tali che tutte le disuguaglianze $g_i(x) \geq b_i$, $i = 1, \ldots, m$ sono verificate.

I problemi di Programmazione Matematica si possono classificare in base alla struttura delle funzioni che li definiscono; si parla di

- problema di *Programmazione Lineare (PL)* se la funzione obiettivo $f(x)$ e tutte le funzioni che definisco i vincoli $g_i(x)$, $i = 1, \dots m$ sono *lineari*, cioè esprimibili nella forma
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n;$$
- problema di *Programmazione Non Lineare (PNL)* se almeno una delle funzioni che definiscono un problema di Programmazione Matematica non è lineare.

Si formalizzano nella definizione che segue alcune semplici concetti riguardanti i vincoli di un problema di Programmazione Matematica.

Definizione 1.2.5 *Si consideri un vincolo di disuguaglianza del tipo $g(x) \le b$; esso si dice* violato *in un punto $\bar{x}$ se $g(\bar{x}) > b$; esso si dice* attivo *in un punto $\bar{x}$ se $g(\bar{x}) = b$.*

Alcuni esempi di problemi di Programmazione Matematica sono i seguenti:

Esempio 1.2.6 *Si consideri una funzione obiettivo di due variabili $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ che si vuole massimizzare, con i vincoli $2x_1 + x_2 \le 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$. Si ottiene il problema*
$$\begin{cases} \max 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$
che è nella forma (1.1) dove $g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, $g_2(x_1, x_2) = x_1$, $g_3(x_1, x_2) = x_2$, $b_1 = 1$, $b_2 = b_3 = 0$. L'insieme ammissibile è descritto attraverso questi tre vincoli e poiché tutte le funzioni che compaiono sono lineari nella variabili x_1 e x_2, questo problema è un problema di Programmazione Lineare.

Esempio 1.2.7 *Si consideri una funzione obiettivo $f(x_1, x_2) = (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2$ che si vuole massimizzare, con i vincoli $x_1 + x_2 \ge 1$, $x_1 \le 1$, $x_2 \le 1$. Si ottiene il problema*
$$\begin{cases} \max (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \le 1 \\ x_2 \le 1 \end{cases}$$
che è un problema di Programmazione Non Lineare (quadratico).

Esempio 1.2.8 *Si consideri una funzione obiettivo $f(x_1, x_2) = 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2$ che si vuole minimizzare, con vincoli $x_1 + x_2 \le \frac{1}{2}$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 1$. Si ottiene il problema*
$$\begin{cases} \min 3x_1^3 + 7x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_2 \le \frac{1}{2} \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 1 \end{cases}$$
che è un problema di Programmazione Non Lineare che può essere facilmente ricondotto nella forma (1.1) riscrivendo gli ultimi due vincoli nella forma $-x_1 \le 0$ e $-x_2 \le -1$.

Esempio 1.2.9 *Si consideri una funzione obiettivo $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ che si vuole minimizzare sulla regione ammissibile descritta dal vincolo di uguaglianza $4x_1 - x_2 = -2$. Il problema di Programmazione Lineare risultante è*
$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 \\ 4x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$
che è un problema di Programmazione Lineare con un solo vincolo di uguaglianza.

In generale, la costruzione formale di un modello di Programmazione Matematica si effettua a partire da una descrizione logica e qualitativa di un problema di decisione e richiede di:

1. Associare opportune *variabili di decisione* alle grandezze reali. Tali variabili costituiscono le incognite del problema.
2. Esprimere quantitativamente i *legami* esistenti tra le variabili e le *limitazioni* derivanti da considerazioni di carattere fisico, economico, etc. Tali legami e limitazioni definiscono i *vincoli*. L'insieme dei valori delle variabili per cui i vincoli sono soddisfatti costituisce l'*insieme ammissibile*.
3. Esprimere formalmente l'*obiettivo* che si intende minimizzare o massimizzare.

1.3 Esempi di costruzione di modelli di Programmazione Matematica

Come primi esempi di costruzione di modelli verranno ora analizzati un semplice problema di pianificazione della produzione, un problema di pianificazione degli investimenti e un problema di progettazione industriale.

Esempio 1.3.1 *Un'industria chimica fabbrica 4 tipi di fertilizzanti,* **Tipo 1**, **Tipo 2**, **Tipo 3**, **Tipo 4**, *la cui lavorazione è affidata a due reparti dell'industria: il reparto produzione e il reparto confezione. Per ottenere fertilizzante pronto per la vendita è necessaria naturalmente la lavorazione in entrambi i reparti. La tabella che segue riporta, per ciascun tipo di fertilizzante i tempi (in ore) necessari di lavorazione in ciascuno dei reparti per avere una tonnellata di fertilizzante pronto per la vendita.*

	Tipo 1	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
Reparto produzione	2	1.5	0.5	2.5
Reparto confezionamento	0.5	0.25	0.25	1

Dopo aver dedotto il costo del materiale grezzo, ciascuna tonnellata di fertilizzante dà i seguenti profitti (prezzi espressi in Euro per tonnellata)

	Tipo 1	**Tipo 2**	**Tipo 3**	**Tipo 4**
profitti netti	250	230	110	350

Determinare le quantità che si devono produrre settimanalmente di ciascun tipo di fertilizzante in modo da massimizzare il profitto complessivo, sapendo che settimanalmente il reparto produzione può lavorare al più 100 ore mentre il reparto confezionamento può lavorare al più 50 ore settimanali.

Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di un problema di pianificazione della produzione industriale. Costruiamo un modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema in analisi supponendo di voler pianificare la produzione settimanale.

– *Variabili di decisione.* La scelta delle variabili di decisione é molto delicata: infatti la qualitá dell'intero modello dipenderá da essa. In genere, per stabilire l'opportuno insieme di variabili di decisione, conviene porsi la seguente domanda: che cosa vuole sapere il decisore alla fine del processo di ottimizzazione?

Ancora meglio, cosa gli é *sufficiente* sapere, per prendere le sue decisioni? In questo caso, ad esempio, tutto ció che il decisore deve conoscere sono le quantitá di fertilizzante da produrre per ciascun tipo. Dunque introduciamo le variabili reali x_1, x_2, x_3, x_4 rappresentanti rispettivamente le quantità di prodotto del **Tipo 1**, **Tipo 2**, **Tipo 3**, **Tipo 4** da fabbricare in una settimana.

– *Funzione Obiettivo.* Ciascuna tonnellata di fertilizzante contribuisce al profitto totale secondo la tabella data. Quindi il profitto totale sarà

$$250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4. \tag{1.2}$$

L'obiettivo dell'industria sarà quello di scegliere le variabili x_1, x_2, x_3, x_4 in modo che l'espressione (3.1) del profitto sia massimizzata. La (3.1) rappresenta la funzione obiettivo.

– *Vincoli.* Ovviamente la capacità produttiva della fabbrica limita i valori che possono assumere le variabili x_j, $j = 1, \ldots, 4$; infatti si ha una capacità massima lavorativa in ore settimanali di ciascun reparto. In particolare per il reparto produzione si hanno a disposizione al più 100 ore settimanali e poiché ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 1** utilizza il reparto produzione per 2 ore, ogni tonnellata di fertilizzante di **Tipo 2** utilizza il reparto produzione per 1.5 ore e così via per gli altri tipi di fertilizzanti si dovrà avere

$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100. \tag{1.3}$$

Ragionando in modo analogo per il reparto confezionamento si ottiene

$$0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50. \tag{1.4}$$

Le espressioni (3.2), (3.3) costituiscono i vincoli del modello. Si devono inoltre esplicitare vincoli dovuti al fatto che le variabili x_j, $j = 1, \ldots 4$ rappresentando quantità di prodotto non possono essere negative e quindi vanno aggiunti i vincoli di non negatività

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

La formulazione finale sarà quindi

$$\begin{cases} \max\,(250x_1 + 230x_2 + 110x_3 + 350x_4) \\ 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 + 2.5x_4 \leq 100 \\ 0.5x_1 + 0.25x_2 + 0.25x_3 + x_4 \leq 50 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Questa formulazione è un problema matematico ben definito e costituisce il modello di Programmazione Matematica rappresentante il problema di pianificazione della produzione industriale in analisi. Si tratta, in questo caso, di un problema di programmazione lineare. □

Esempio 1.3.2 – Capital Budgeting. *Supponiamo di dover investire £1000 sul mercato finanziario. Supponiamo inoltre che il mercato offra tre tipi diversi di investimenti* **A**, **B**, **C** *ciascuno caratterizzato da un prezzo d'acquisto e da un rendimento netto, che sono riassunti nella seguente tabella:*

	A	**B**	**C**
costo	*750*	*200*	*800*
rendimento	*20*	*5*	*10*

Si vuole decidere quali degli investimenti effettuare per massimizzare il rendimento sapendo che gli investimenti **A**, **B**, **C** *non si possono effettuare in modo parziale cioà non sono frazionabili.*

Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di un problema di pianificazione degli investimenti. Si devono definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

– *Variabili di decisione.* In questo caso il decisore vuole semplicemente sapere, per ogni investimento, se tale investimento deve essere effettuato oppure no. Una scelta naturale delle variabili di decisione è la seguente:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{non si effetua l'investimento } i\text{-esimo} \\ 1 & \text{si effettua l'investimento } i\text{-esimo} \end{cases} \qquad i = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \tag{1.5}$$

– *Insieme ammissibile.* In base alla definizione delle variabili, le possibili scelte compatibili con il nostro budget sono:

(0) non si effettuano investimenti $x_A = x_B = x_C = 0$

(1) si effettua l'investimento **A**; $x_A = 1, x_B = x_C = 0$

(2) si effettua l'investimento **B**; $x_A = 0, x_B = 1, x_C = 0$

(3) si effettua l'investimento **C**; $x_A = x_B = 0, x_C = 1$

(4) si effettuano gli investimenti **A** e **B**; $x_A = x_B = 1, x_C = 0$

(5) si effettuano gli investimenti **B** e **C**; $x_A = 0, x_B = x_C = 1$.

Notiamo che le possibilità **A**, **C** e **A**, **B**, **C** non sono ammissibili in quanto il costo supera la nostra disponibilità.
L'insieme ammissibile, ovvero l'insieme delle possibili scelte $(0) - (5)$ è dato da:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si tratta quindi di un sottoinsieme dei vettori di $\mathbb{R}^3$ a componenti $0 - 1$ ovvero

$$S \subseteq \{0, 1\}^3$$

– *Funzione obiettivo.* L'obiettivo che ci proponiamo è la massimizzazione del rendimento totale. Quindi dobbiamo esprimere la funzione obiettivo che corrisponde al rendimento netto relativo alla scelta di $x = (x_A, x_B, x_C)^T$ in S, cioè:

$$f(x) = 20x_A + 5x_B + 10x_C.$$

È possibile ottenere la soluzione ottima valutando esaustivamente la funzione obiettivo per ogni elemento di S, ottenendo in relazione alle possibili scelte:

(0) $f_0 = 0$

(1) $f_1 = 20$

(2) $f_2 = 5$

(3) $f_3 = 10$

(4) $f_4 = 25$

(5) $f_5 = 15$.

La soluzione ottima è ovviamente quella corrispondente alla scelta (4), cioè all'effettuare gli investimenti **A** e **B**, con valore della funzione obiettivo pari a £25.

Questo rappresentazione del problema ha alcuni difetti, in particolare:

1. *L'insieme ammissibile S è rappresentato in modo estensivo*, cioè elencando tutte le soluzioni ammissibili. In questo caso la cardinalità dell'insieme ammissibile è al più quella di $\{0,1\}^3$ cioè 2^3, ma in generale, se la dimensione del problema fosse più grande sarebbe impossibile valutare esaustivamente le soluzioni del problema. Se, ad esempio, il numero degli investimenti fosse stato 100 (che dal punto di vista delle applicazioni reali è del tutto verosimile) la cardinalità dell'insieme ammissibile sarebbe stata 2^{100} e per la valutazione di 2^{100} possibilità anche supponendo di utilizzare un calcolatore che effettui 10^{10} valutazioni al secondo (velocità superiore a quella raggiungibile dai calcolatori attuali) occorrerebbero 10^{20} secondi, cioè 3000 miliardi di anni !

2. *Il modello non è indipendente dai dati del problema*, cioè cambiando i dati del problema (prezzi e/o rendimenti) sarebbe necessario cambiare completamente il modello.

In genere si cerca di dare una *rappresentazione intensiva* dell'insieme ammissibile S, cioè individuare le proprietà $P(x)$ che consentono di distinguere le soluzioni ammissibili dagli elementi dell'insieme $\{0,1\}^3$ che non lo sono. Si vuole quindi scrivere l'insieme S in una forma del tipo:

$$S = \left\{x \in \{0,1\}^3 : \text{ vale la proprietà } \ P(x)\right\}.$$

Nell'esempio, la proprietà distintiva degli elementi di S è il costo complessivo che non deve essere superiore a £1000. Possiamo esprimere matematicamente questa relazione come:

$$P(x): \ 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000$$

e quindi l'insieme ammissibile si può scrivere

$$S = \left\{x = (x_A, x_B, x_C)^T \in \{0,1\}^3 : 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000\right\}.$$

In conclusione, il problema di decisione può essere posto nella forma:

$$\begin{cases} \max\,(20x_A + 5x_B + 10x_C) \\ 750x_A + 200x_B + 800x_C \leq 1000 \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}. \end{cases}$$

Si tratta di un problema di programmazione lineare intera.

□

Esempio 1.3.3 *Un'industria deve costruire un silos di forma cilindrica per contenere grandi quantitativi di un liquido che verrà poi distribuito in piccole confezioni pronte per la vendita al minuto. Tale silos deve essere posto in un magazzino appoggiato su una delle basi. Tale magazzino è a pianta rettangolare di dimensioni metri* 20×10 *ed ha un tetto spiovente lungo il lato di 10 metri, che ha altezza massima di metri* 5 *e altezza minima di metri* 3. *Per costruire questo silos deve essere usato del materiale plastico sottile flessibile che può essere tagliato, modellato e incollato saldamente. Sapendo che si dispone di non più di* 200 m^2 *di tale materiale plastico si costruisca un modello che permetta di determinare le dimensioni del silos (raggio di base ed altezza) in modo da massimizzare la quantità di liquido che può esservi contenuto.*

Analisi del problema e costruzione del modello.

Si tratta di determinare il dimensionamento ottimale di un contenitore cilindrico per uso industriale cercando di massimizzare il suo volume tenendo presente che deve essere contenuto in un magazzino di dimensioni fissate.

Si devono definire formalmente le variabili di decisione, l'insieme delle soluzioni ammissibili e la funzione obiettivo.

– *Variabili di decisione.* È immediato introdurre due variabili x e y che rappresentano rispettivamente la lunghezza (in metri) del raggio di base e dell'altezza del contenitore cilindrico.

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è rappresentata dal volume del contenitore cilindrico ed è data da

$$\pi x^2 y.$$

– *Vincoli.* Il diametro della base non può superare le dimensioni del magazzino e quindi deve essere

$$2x \leq 10.$$

La limitazione dell'altezza del contenitore varia al variare del diametro di base in quanto il tetto è spiovente. Dato che la pendenza del tetto è del 20%, dovrà risultare

$$y \leq 5 - 0.2 \cdot 2x.$$

Inoltre disponendo solo di una quantità limitata di materiale plastico la superficie totale del contenitore cilindrico non può superare $200m^2$ e quindi deve risultare

$$2\pi x^2 + 2\pi xy \leq 200.$$

Si devono infine esplicitare i vincoli di non negatività $x \geq 0$, $y \geq 0$.

La formulazione complessiva risulta quindi

$$\begin{cases} \max\ \pi x^2 y \\ x \leq 5 \\ y \leq 5 - 0.2 \cdot 2x \\ 2\pi x^2 + 2\pi xy \leq 200 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Il modello è quindi un modello di programmazione non lineare. □