Bozza di soluzione - Appello 14 Aprile 2000

[1] Dallo schema a blocchi si deducono le seguenti equazioni differenziali

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= \omega \\
J\dot{\omega} &= -b\omega - C_d + K_a i \\
L\frac{di}{dt} &= -Ri + V - K_m\omega
\end{aligned}$$

Scegliendo come variabili di stato

$$x = \begin{pmatrix} i \\ \vartheta \\ \omega \end{pmatrix}$$

si ottiene la seguente rappresentazione con lo spazio di stato

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{K_m}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_a}{J} & 0 & -\frac{b}{J} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{pmatrix} C_d$$

Essendo la matrice dinamica A singolare, è evidente la presenza di un autovalore in $\lambda = 0$. Il polinomio caratteristico è dato da

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda \left[\lambda^2 + \left(\frac{b}{J} + \frac{R}{L}\right)\lambda + \frac{Rb + K_a K_m}{JL}\right] = \lambda p(\lambda)$$

Il polinomio $p(\lambda)$ è un polinomio del secondo ordine con tutti i coefficienti dello stesso segno $\Longrightarrow$ $p(\lambda)$ ha entrambe le radici a parte reale negativa. Il sistema è stabile semplicemente e ha infiniti stati di equilibrio dati dall'equazione

$$Ax_e = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ \forall \\ 0 \end{pmatrix}$$

e quindi ogni posizione angolare ϑ a velocità angolare nulla e intensità di corrente nulla è stato di equilibrio.

Chiamando con $F_1(s)$ la funzione di trasferimento $V \to \omega$ si ha

$$F_1(s) = \frac{K_a}{(Ls+R)(Js+b) + K_a K_m} = \frac{K_a}{JLs^2 + (bL + RJ)s + K_a K_m + Rb}$$

si nota che il sistema $F_1(s)$ è stabile asintoticamente ed è privo di poli in $s = 0$ pertanto il sistema ad anello chiuso con controreazione da ω è di tipo 0. Essendo il sistema ad anello chiuso anch'esso stabile asintoticamente per qualsiasi valore di K_c positivo (basta considerare il luogo positivo delle radici corrispondente a due poli a parte reale minore di zero), con K_c si è indicato il controllore statico, in corrispondenza a un ingresso di riferimento in velocità costante ω_d (ingresso di ordine 0) si ha un errore a regime permanente costante diverso da zero (decrescente all'aumentare di K_c positivo). Non è quindi possibile assicurare, a regime permanente, una qualsiasi velocità angolare costante desiderata in uscita.

Effettuando, in alternativa, una controreazione dalla posizione angolare ϑ in catena diretta si ha

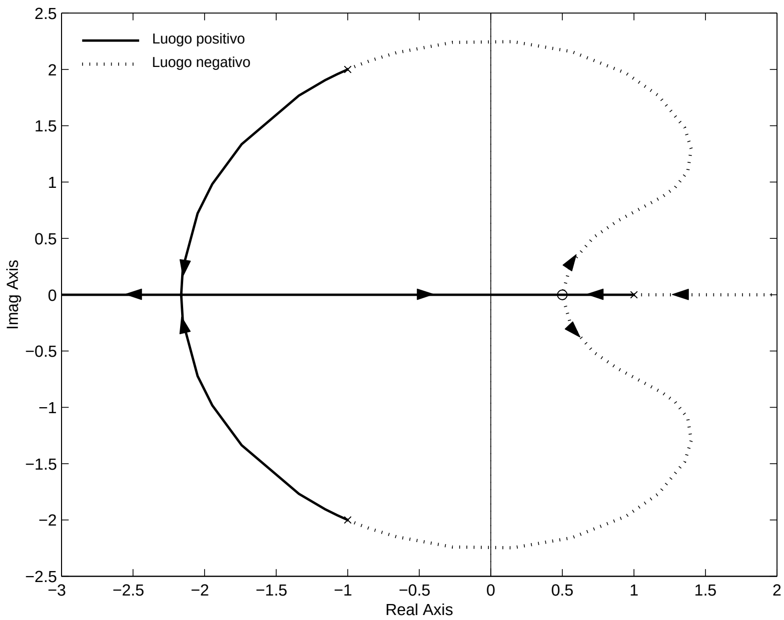
$$K_c F_1(s)\frac{1}{s}$$

e pertanto il sistema è di tipo 1 (presenza di un polo in $s = 0$ in catena diretta). Per imporre una velocità angolare costante desiderata ω_d, il riferimento in posizione è pari a $\vartheta_d(t) = \omega_d t \delta_{-1}(t)$ (ingresso di ordine 1) $\Longrightarrow e_1 = \text{costante} \neq 0$ (se esiste il regime permanente). Il luogo delle radici corrispondente (2 poli a parte reale minore di zero e 1 polo in $s = 0$, $n - m = 3$, assenza di zeri) indica che il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente per valori di K_c positivi minori di un certo K_c^*. Se invece l'ingresso di riferimento è una posizione desiderata angolare costante (ingresso di ordine 0), l'errore a regime è nullo se il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente ($K_c < K_c^*$).

[2] Si può riscrivere $F(s)$ come

$$F(s) = \frac{100K(s-0.5)^2}{(s-1)(s-1\pm 2j)}$$

e tracciare il luogo delle radici con $K' = 100K$. Doppio zero in $s = 0.5 \rightarrow$ punto singolare di molteplicità 2, è inoltre evidente la necessità della presenza di un punto singolare sull'asse reale a sinistra degli zeri in $s = 0.5$.



Luogo delle radici

[3] Il sistema è caratterizzato dalla funzione di trasferimento

$$F(s) = \frac{K}{1+\tau s} = \frac{K}{\tau}\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}$$

e pertanto può semplicemente essere rappresentato dalla terna (realizzazione in forma canonica raggiungibile)

$$A = -\frac{1}{\tau}, \quad B = 1, \quad C = \frac{K}{\tau}$$

o, in alternativa, dalla terna (realizzazione in forma canonica osservabile)

$$A = -\frac{1}{\tau}, \quad B = \frac{K}{\tau}, \quad C = 1$$

[4] Nello schema a controreazione unitaria considerato la funzione di trasferimento disturbo/uscita è data da

$$W_d(s) = \frac{1}{1+F(s)}$$

e la specifica richiesta equivale a (essendo l'ingresso di disturbo pari a $d(t) = A\sin\omega t$)

$$|y_{RP}(t)| = \big|A|W_d(j\omega)|\sin(\omega t + \langle W_d(j\omega)\rangle)\big| < \epsilon$$

Tramite l'analisi approssimata è possibile tradurre questa specifica sul sistema in catena diretta

$$|F(j\omega)| > 1 + \frac{A}{\epsilon}, \quad \text{per} \quad \omega \in (0, 0.1/\tau]$$

Dal diagramma del modulo di $F(j\omega)$ è evidente che deve risultare

$$|K| > 1 + \frac{A}{\epsilon} \Longrightarrow K < -1 - \frac{A}{\epsilon}, \quad K > 1 + \frac{A}{\epsilon}$$

essendo inoltre il sistema ad anello chiuso stabile asintoticamente per $K > -1$, in conclusione deve essere

$$K > 1 + \frac{A}{\epsilon}$$