OTTIMIZZAZIONE A.A. 2002-03
ESONERO DEL 20.12.02 (A)

Cognome..............................

Nome..................................

Punti ....

1. **(8 punti)** Convergenza e complessità dell'algoritmo di Karmarkar.

2. **(2.5 punti)**

   (a) Si consideri il problema dell'addestramento di una rete multi-strato in cui i neuroni hanno la fuzione logistica come funzione di attivazione. Dimostrare che la funzione obiettivo di tale problema non è coerciva.

   (b) Descrivere con un esempio numerico una singola iterazione dell'algoritmo back propagation tipo batch e dell'algoritmo back propagation tipo on line (si assuma pari a 0.1 il valore del learning rate).

3. **(2 punti)** Sia dato il problema (P)

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1^3 + x_2^2 - 1 \\
 & x_1^2 + x_2 = 1 \\
 & x_1^3 \leq 8
\end{array}
$$

   (a) (1.5 punti) Sia $x^0 = (0,1)^T$ e λ^0 μ^0 fissati, scrivere il sottoproblema di Programmazione quadratica $(\mathrm{PQ})_0$ relativo alla prima iterazione di un metodo RQP per la soluzione del problema (P).

   (b) (0.5 punto) Scrivere l'espressione della funzione di penalitá sequenziale esterna per il problema (P).

4. **(2 punti)** Sia dato il problema (P)

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_1^3 + x_2^2 - 1 \\
 & x_1^2 + x_2 = 1 \\
 & x_1^3 = 8
\end{array}
$$

   (1 punto) Scrivere l'espressione della funzione moltiplicatrice relativa ad una funzione di penalitá esatta per il problema (P) nel punto $(1,\ 1)^T$.

   (1 punto) Scrivere l'espressione della funzione lagrangiana aumentata esatta per il problema (P).

5. **(1.5 punti)** Si consideri il seguente problema:

Un'industria produce tre modelli differenti S1, S2, S3 di stereo. Per produrre tali modelli possono essere usate quattro differenti macchinari M1, M2, M3, M4. Ciascun modello per essere pronto alla vendita deve essere lavorato su tutti e quattro i macchinari. I tempi necessari a_{ij} (in ore) per produrre ciascuno dei tre modelli su ciascun macchinario sono riportati nella seguente tabella insieme al prezzo unitario di vendita di ciascun modello e al costo di funzionamento all'ora(c_j) dei macchinari rappresentato dalla corrente elettrica utilizzata (in Euro):

	S1	S2	S3	c_j
M1	4.8	6	5.5	1
M2	4	5	4.5	1.2
M3	4	3	3.5	1
M4	7	6.5	5	0.8
prezzo p_i	300	400	500	

Per vincoli di mercato il numero di unitá prodotte del modello S2 non puó superare il 43% del totale dei prodotti fabbricati(perc_max). Si vuole pianificare la produzione settimanale massimizzando il profitto complessivo e sapendo che in tutto devono essere prodotti almeno 900 (q_min) stereo e che settimanalmente i quattro macchinari sono disponibili rispettivamente per 40, 30, 40, 45 ore (ore_j).

La formulazione come problema di PL é la seguente:

$$\max \sum_{i=1}^{3} p_i x_i - \sum_{j=1}^{4} c_j \sum_{k=1}^{3} a_{kj} x_k$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i \leq ore_j \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_i \geq \text{q\_min}$$

$$x_2 \leq \text{perc\_max} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \right)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

dove x_i, $i = 1, \ldots, 3$ sono le variabili di decisione del problema che rappresentano il numero di stereo prodotti di ogni modello.

Scrivere il file del modello (`.mod`) e il file dei dati (`.dat`) che nel linguaggio AMPL rappresentano il problema descritto.

OTTIMIZZAZIONE A.A. 2002-03
ESONERO DEL 20.12.02 (B)

Cognome.............................

Nome..................................

Punti ....

1. **(8 punti)** Definire la funzione di penalità sequenziale esterna per un problema di ottimizzazione vincolata. Supponendo valido il lemma preliminare sulle disuguaglianze significative (di cui si deve riportare l'enunciato), si dimostri il teorema di convergenza del metodo delle funzioni di penalità esterne.

2. **(2.5 punti)**

   (a) Si consideri il problema dell'addestramento di una rete multi-strato in cui i neuroni hanno la fuzione logistica come funzione di attivazione. Dimostrare che la funzione obiettivo di tale problema non è coerciva.

   (b) Descrivere con un esempio numerico una singola iterazione dell'algoritmo back propagation tipo batch e dell'algoritmo back propagation tipo on line (si assuma pari a 0.1 il valore del learning rate).

3. **(3 punti)** Dimostrare che il problema

$$
\begin{array}{ll}
\max & \left(\Pi_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \\
 & \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
 & x_i \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

   ha come soluzione il punto $x^* = (1/n, \ldots, 1/n)^T$.

4. **(1 punto)** Sia dato il problema (P)

$$
\begin{array}{ll}
\min & 2x_2^3 + x_1^2 - 1 \\
 & x_2^3 \leq 8
\end{array}
$$

   Sia $x^0 = (0, 1)^T$ e λ^0 fissato, scrivere il sottoproblema di Programmazione quadratica $(PQ)_0$ relativo alla prima iterazione di un metodo RQP per la soluzione del problema (P).

5. **(1.5 punti)** Si consideri il seguente problema:

   Una pasticceria produce 3 diversi tipi di confezioni di gelato: vaniglia e cioccolata(VC), cioccolata crema e nocciola(CCN), nocciola vaniglia e crema(NVP). Per la produzione delle confezioni sono necessari i quattro gusti: cioccolata, crema, vaniglia e nocciola. Nella tabella vengono indicati i kg (a_{ij}) dei quattro gusti necessari in ogni tipo di confezione, le quantitá massime (qmax_j) disponibili in kg di questi gusti e i costi in euro al kg:

	VC	**CCN**	**NVP**	qmax_j	c_j
cioccolato	0.5	0.5	0	1000	6
crema	0	0.4	0.4	800	5.5
nocciola	0	0.4	0.4	800	5.5
vaniglia	0.5	0	0.4	700	6
prezzo	8	10	9		

Inoltre la produzione di confezioni VC deve costituire almeno il 45%(perc_min) della produzione totale. Si vuole pianificare la produzione di questa pasticceria, si vuole cioè determinare le quantitá di ciascuna confezione da produrre sapendo che in totale devono essere prodotte almeno 675 confezioni ($q_{\min}$) (indipendentemente dal tipo), in modo da massimizzare il profitto.

$$\max \sum_{i=1}^{3} p_i x_i - \sum_{j=1}^{4} c_j \sum_{k=1}^{3} a_{kj} x_k$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_i \geq \mathrm{q\_min}$$
$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i \leq \mathrm{q\_max}_j \qquad j = 1, \ldots, 4$$
$$x_1 \geq \mathrm{perc\_min} \left(\sum_{i=1}^{3} x_i \right)$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

dove x_i, $i = 1, \ldots, 3$ sono le variabili di decisione del problema che rappresentano il numero di confezioni di gelato prodotte di ogni tipo.

Scrivere il file del modello (`.mod`) e il file dei dati (`.dat`) che nel linguaggio AMPL rappresentano il problema descritto.

OTTIMIZZAZIONE A.A. 2002-03
ESONERO DEL 20.12.02 (C)

Cognome.............................

Nome..................................

Punti ....

1. **(8 punti)** Dimostrare che il Problema (P4)

$$\begin{array}{ll} \min & c^T D_{\bar{x}} y \\ & A D_{\bar{x}} y = 0 \\ & e^T y = 1 \\ & \|y - a\|^2 \leq \rho^2 \end{array}$$

ammette la soluzione

$$y^* = a - \rho \frac{\left(I - B^T(BB^T)^{-1}B\right) D_{\bar{x}} c}{\|\left(I - B^T(BB^T)^{-1}B\right) D_{\bar{x}} c\|},$$

dove $B = \left[D_{\bar{x}} A^T, e\right]^T$

2. **(2.5 punti)**

   (a) Si consideri il problema dell'addestramento di una rete multi-strato in cui i neuroni hanno la fuzione logistica come funzione di attivazione. Dimostrare che la funzione obiettivo di tale problema non è coerciva.

   (b) Descrivere con un esempio numerico una singola iterazione dell'algoritmo back propagation tipo batch e dell'algoritmo back propagation tipo on line (si assuma pari a 0.1 il valore del learning rate).

3. **(2 punti)** Sia dato il problema (P)

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1^3 + x_2^2 - 1 \\ & x_1^2 + x_2 = 1 \\ & x_1^3 \leq 8 \end{array}$$

   (1.5 punti) Sia $x^0 = (0,1)^T$ e λ^0 μ^0 fissati, scrivere il sottoproblema di Programmazione quadratica $(\mathrm{PQ})_0$ relativo alla prima iterazione di un metodo RQP per la soluzione del problema (P).

   (0.5 punto) Scrivere l'espressione della funzione di penalitá sequenziale esterna per il problema (P).

4. **(2 punti)** Sia dato il problema (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1^3 + x_2^2 - 1 \\ & x_1^2 + x_2 = 1 \\ & x_1^3 = 8 \end{aligned}$$

(1 punto) Scrivere l'espressione della funzione moltiplicatrice relativa ad una funzione di penalitá esatta per il problema (P) nel punto $(1,\ 1)^T$.

(1 punto) Scrivere l'espressione della funzione lagrangiana aumentata esatta per il problema (P).

5. **(1.5 punti)** Si consideri il seguente problema:

Un'industria produce quattro modelli differenti M1, M2, M3, M4 di cellulari. Per produrre tali modelli possono essere usate tre differenti linee di produzione L1, L2, L3. Ciascun modello per essere pronto alla vendita deve essere lavorato su tutte e tre le linee di produzione. I tempi necessari a_{ij} (in ore) per produrre ciascuno dei quattro modelli su ciascuna delle linee di produzione sono riportati nella seguente tabella insieme al prezzo unitario di vendita di ciascun modello, al costo di funzionamento all'ora(c_j) delle linee di produzione rappresentato dal pagamento degli operai che ci lavorano (in Euro):

	M1	M2	M3	M4	costo c_j
L1	4.8	6	5.5	5	10
L2	4	5	4.5	6	12
L3	4	3	3.5	8	10
prezzo (p_i)	289	350	450	600	

Per vincoli di mercato il numero unitá prodotte del modello M2 non puó superare il 40% del totale dei prodotti fabbricati(perc_max). Si vuole pianificare la produzione settimanale massimizzando il profitto complessivo e sapendo che in tutto devono essere prodotti almeno 800 (q_min) cellulari e che settimanalmente le tre linee sono disponibili rispettivamente per 40, 30, 40 ore (ore_j) e tenendo conto infine che se viene prodotto il modello M1 allora non può essere prodotto il modello M2.

La formulazione come problema di PL é la seguente:

$$\max \sum_{i=1}^{4} p_i x_i - \sum_{j=1}^{3} c_j \sum_{k=1}^{4} a_{kj} x_k$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij} x_i \leq ore_j \qquad j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \geq \text{q\_min}$$

$$
\begin{aligned}
&x_2 \leq \text{perc\_max}\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)\\
&x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

dove $x_i,\ i = 1, \ldots, 4$ sono le variabili di decisione del problema che rappresentano il numero di cellulari prodotti di ogni modello.

Scrivere il file del modello (`.mod`) e il file dei dati (`.dat`) che nel linguaggio AMPL rappresentano il problema descritto.

OTTIMIZZAZIONE A.A. 2002-03
ESONERO DEL 20.12.02 (D)

Cognome.............................

Nome..................................

Punti ....

1. **(8 punti)** Si descriva il metodo delle funzioni aumentate Lagrangiane sequenziali per la programmazione non lineare con soli vincoli di uguaglianza.

2. **(1 punto)** Sia dato il problema (P)

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1^3 + x_2^2 - 1 \\ & x_1^2 + x_2 = 1 \\ & x_1^3 = 8 \end{array}$$

   Scrivere l'espressione della funzione moltiplicatrice relativa ad una funzione di penalitá esatta per il problema (P) nel punto $(1,\ 1)^T$.

3. **(2.5 punti)**

   (a) Si consideri il problema dell'addestramento di una rete multi-strato in cui i neuroni hanno la fuzione logistica come funzione di attivazione. Dimostrare che la funzione obiettivo di tale problema non è coerciva.

   (b) Descrivere con un esempio numerico una singola iterazione dell'algoritmo back propagation tipo batch e dell'algoritmo back propagation tipo on line (si assuma pari a 0.1 il valore del learning rate).

4. **(3 punti)** Dimostrare che il problema

$$\begin{array}{ll} \max & (\Pi_{i=1}^n x_i)^{1/n} \\ & \sum_{i=1}^n x_i = 1 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n \end{array}$$

   ha come soluzione il punto $x^* = (1/n, \ldots, 1/n)^T$.

5. **(1.5 punti)** Si consideri il seguente problema:

   Una fabbrica produce 3 diversi tipi di cioccolata: al latte(L), fondente con nocciole(FN), al latte con nocciole(LN). Per la produzione della cioccolata sono necessari quattro ingredienti: latte, cacao, nocciole e zucchero. Nella tabella vengono indicati i kg (a_{ij}) di nocciole, cacao e zucchero, e i litri di latte necessari per ciascun kg di cioccolata, le quantitá massime (q_max$_j$) disponibili in kg di questi ingredienti, i costi in euro al kg e il prezzo di vendita (p$_i$) di ogni tipo di cioccolata (euro/kg):

	L	**FN**	**LN**	Quant. max (q_max$_j$)	costo (c$_j$)
latte	0.3	0	0.2	7500	1
cacao	0.4	0.7	0.4	10000	2
nocciole	0	0.	0.2	4000	1.5
zucchero	0.3	0.3	0.2	5000	0.5
prezzo p_i	7	10	9		

Inoltre la produzione di cioccolata al latte deve essere almeno il 40% (perc_min) della produzione totale. Si vuole pianificare la produzione di questa industria, si vuole cioè determinare le quantitá di ciascun tipo di cioccolata da produrre sapendo che in totale devono essere prodotti almeno 6750 kg di cioccolata ($q_{\min}$) (indipendentemente dal tipo), in modo da massimizzare il profitto.

La formulazione come problema di PL è la seguente:

$$
\begin{aligned}
&\max \sum_{i=1}^{3} p_i x_i - \sum_{j=1}^{4} c_j \sum_{k=1}^{3} a_{kj} x_k \\
&\sum_{i=1}^{3} x_i \geq \text{q\_min} \\
&\sum_{i=1}^{3} a_{ij} x_i \leq \text{q\_max}_j \qquad j = 1, \ldots, 4 \\
&x_1 \geq \text{perc\_min} \left(\sum_{j=1}^{3} x_j \right) \\
&x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

dove x_i, $i = 1, \ldots, 3$ sono le variabili di decisione del problema che rappresentano la quantità (in kg) prodotta per ogni tipo di cioccolata.

Scrivere il file del modello (`.mod`) e il file dei dati (`.dat`) che nel linguaggio AMPL rappresentano il problema descritto.