Corso di Ottimizzazione

Dispense di Teoria dei giochi

a cura di

Laura Palagi

December 14, 1999

Dipartimento di Informatica e Sistemistica

Via Buonarroti, 12 - 00185 Roma

http:\\ www.dis.uniroma1.it

1

Cenni di teoria dei giochi

1.1 Introduzione

Un problema di decisione consiste nell'individuare da parte di un "decisore esperto" quale, tra un certo numero di alternative, consente di ottenere il miglior risultato, secondo un criterio di razionalità che consiste nel massimizzare i profitti o minimizzare i costi. Si tratta cioè di una situazione in cui c'è un solo protagonista e la soluzione dipende dallo stato del sistema, che potrebbe non essere noto a priori ma non c'è una situazione di antagonismo.

La teoria dei giochi si occupa invece di analizzare situazioni di conflitto tra diversi decisori che hanno interessi opposti o semplicemente differenti. Un gioco quindi è una situazione in cui ci sono più decisori in competizione tra loro e le singole decisioni dipendono dalle decisioni altrui. Gli antagonisti in un gioco possono esser singoli individui o gruppi di individui o organizzazioni e sono indicati brevemente con il nome di "giocatori".
Ogni giocatore può scegliere tra un certo numero (finito o infinito) di possibili scelte (mosse) che si dicono strategie. In particolare:

Definizione *Si dice strategia di un giocatore un insieme di regole che determinano univocamente il suo comportamento.*

In un gioco la stessa strategia può dare esiti diversi a seconda della strategia scelta dall'avversario che può essere in generale sconosciuta. Quindi il risultato non dipende solo dallo stato del sistema, ma anche dalle scelte degli altri giocatori.

La teoria dei giochi si occupa di formalizzare matematicamente gli aspetti fondamentali di situazioni competitive. Quindi ad esempio:

- di esaminare gli esiti possibili;
- di individuare le strategie;
- di dare (o modificare) le regole di gioco.

Lo spirito di questa analisi è quello di prevedere l'esito del comportamento da parte dei decisori, nell'ipotesi che ciascun giocatore abbia uno scopo prefissato. Osserviamo che in questo caso, è difficile definire un criterio "razionale" univoco come nel caso di un problema di decisione; piuttosto si hanno criteri diversi che sono in generale non concordi.

1.2 Definizioni preliminari

La definizione di gioco in forma normale (o strategica) è la seguente:

Definizione *Un gioco in forma normale è dato da* $(\mathcal{N}, \{U_i\}_{i\in\mathcal{N}}, \{J_i\}_{i\in\mathcal{N}})$ *dove:*

1. $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ *è l'insieme finito di giocatori;*

2. U_i *è l'insieme delle strategie per ogni giocatore* $i \in \mathcal{N}$*;*

3. J_i *è la funzione di utilità per ciascun giocatore* $i \in \mathcal{N}$ *definita su un sottoinsieme* $\mathcal{C} \subseteq U_1 \times U_2 \ldots \times U_N$ *del prodotto cartesiano delle strategie:*

$$J_i : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$$

e lo scopo di ciascun giocatore i *è massimizzare la propria utilità:*

$$\max_{u\in\mathcal{C}} \quad J_i(u).$$

Un gioco può essere classificato in base alle informazioni disponibili o alle modalità di gioco. In particolare distinguiamo:

- gioco ad *informazione completa (incompleta)*: ogni giocatore conosce (non conosce) tutti gli elementi che caratterizzano il gioco. Nell'ambito di questi giochi possiamo distinguere ulteriormente tra

  - gioco ad *informazione perfetta*: un gioco in cui, in corrispondenza ad ogni mossa, il giocatore a cui spetta muovere è a conoscenza dell'intera storia del gioco fino a quel momento;
  - gioco ad *informazione imperfetta*: il gioco in cui, in corrispondenza a qualche mossa, il giocatore a cui spetta muovere non è a conoscenza della storia del gioco;

- gioco *statico*: un gioco in cui i giocatori scelgono simultaneamente le loro mosse. Ogni giocatore i sceglie la propria strategia $u_i \in \mathcal{U}_i$; si genera così un vettore $u = (u_1, \ldots, u_N)$ e successivamente ogni giocatore riceve un ammontare pari a $J_i(u)$. In questo caso non esiste la nozione di ordine del gioco, poiché ogni giocatore deve decidere ex-ante la propria azione.

  In un gioco statico possiamo distinguere tra

  - gioco a *strategie pure*: in cui ciascun giocatore gioca una sola strategia u_i nell'insieme delle proprie $\mathcal{U}_i$;
  - gioco a *strategie miste* (vedi §1.3.2).

Se l'insieme $\mathcal{U}_i$ delle possibili strategie pure di ciascun giocatore è finito si parla di giochi matriciali altrimenti si parla di giochi infiniti.
Nel seguito faremo riferimento ad un gioco matriciale statico ad informazione completa.

Nel seguito, per semplicità, consideremo solo giochi matriciali a 2-persone detti anche *giochi bimatriciali*. In questo caso, se il giocatore 1 ha $|U_1| = m$ possibili strategie pure e il giocatore 2 ha $|U_2| = n$ strategie pure, le due funzioni di utilità J_1, J_2 sono rappresentate da due matrici $m \times n$, rispettivamente $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$ e $\mathcal{B} = \{b_{ij}\}$, con $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$ in cui le strategie pure del giocatore 1 sono identificate dall'indice i ed il giocatore è detto giocatore "riga" e le strategie pure del giocatore 2 sono identificate dall'indice j ed il giocatore 2 è detto giocatore "colonna".
Nel seguito quindi faremo riferimento a funzioni $J_1 : \ Z \times Z \to \mathbb{R}$, $J_2 : \ Z \times Z \to \mathbb{R}$, dove $J_1(u_1, u_2) = J_1(i, j) = a_{ij}$ e $J_2(u_1, u_2) = J_2(i, j) = b_{ij}$.
Un gioco matriciale a 2-persone è quindi definito da

$$(\{1, 2\}, \{i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}, \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}).$$

Vediamo alcuni esempi di sutuazioni formalizzabili come gioco.

Esempio 1 *In un mezzo pubblico controllore e passeggero possono essere considerati dei giocatori. Ognuno può adottare le seguento stategie:*

- *il controllore può controllare il biglietto (CB) oppure può non controllare il biglietto (NCB). L'insieme delle strategie pure del controllore è $U_c = \{CB, NCB\}$.*

- *Il passeggero può pagare il biglietto (PB), oppure può non pagare il biglietto (NPB). L'insieme delle strategie pure del passeggero è $U_p = \{PB, NPB\}$.*

Supponendo che il biglietto costi £1 e la multa costi £10 si possono definire le funzioni di utilità del passeggero Jp e del controllore Jc. In particolare si ha:

Passeggero

	CB	*NCB*
PB	*-1*	*-1*
NPB	*-10*	*0*

Controllore

	CB	*NCB*
PB	*0*	*0*
NPB	*10*	*0*

Sinteticamente, si possono riportare in un'unica tabella

	CB	*NCB*
PB	*(-1,0)*	*(-1,0)*
NPB	*(-10,10)*	*(0,0)*

Si tratta di un gioco bimatrice.

Esempio 2 [Il dilemma del prigioniero] *È stato commesso un crimine e due sospetti criminali vengono arrestati. Ciascuno di loro può confessare il crimine (C) o negare (N). I costi rappresentano gli anni di prigione da scontare. Se uno confessa e l'altro nega, chi confessa è condannato a 20 anni di galera mentre l'altro è libero. Se entrambi negano ricevono 8 anni di galera a testa, mentre se entrambi confessano la pena è di soli 2 anni. Gli anni di prigione costituiscono quindi un guadagno negativo. Il gioco può essere rappresentato come segue:*

	C	N
C	$(-2,-2)$	*(-20,0)*
N	*(0,-20)*	*(-8,-8)*

Esempio 3 [La battaglia dei sessi] *Ovvero Moglie e Marito la domenica pomeriggio: Lui preferirebbe veder la partita di calcio in TV (P); Lei fare una passeggiata per il centro (G). Lei è il giocatore colonna e Lui il giocatore riga. Nell'ipotesi che desiderino passare il pomeriggio insieme, il gioco si può rappresentare con la matrice:*

		Lei	
		P	*G*
Lui	*P*	*(4,1)*	*(0,0)*
	G	*(0,0)*	*(1,4)*

Esempio 4 [Gioco dell' "incrocio", Moulin (1981)] *Due motociclisti percorrono due strade perpendicolari e si trovano simultanemanete ad un incrocio. Ciascun motociclista pu decidere di fermarsi (prima strategia 'F') oppure di continuare per la sua strada (seconda strategia 'C'). Ovviamente ciascun motocilista preferisce fermarsi per evitare un incidente, oppure continuare se l' altro si ferma. Il conflitto si può formalizzare come un gioco bimatriciale:*

	F	*C*
F	*(1,1)*	*(1-ε,2)*
C	*(2,1-ε)*	*(0,0)*

1.3 Gioco matriciale statico a 2-persone

1.3.1 Gioco a somma non nulla

Definizione *Un gioco a 2-persone si dice a somma non nulla se risulta per ogni $u \in \mathcal{C}$:*

$$J_1(u) + J_2(u) \neq 0$$

Nel caso di giochi a somma non nulla, ci sono situazioni in cui entrambi i giocatori possono guadagnare di più. Si può quindi cercare una soluzione cooperativa.

Criterio di soluzione cooperativo

Al variare delle strategie (u_1, u_2) nello spazio delle strategie pure $U_1 \times U_2$, le funzioni di utilità dei giocatori variano in una regione del piano degli obiettivi (esiti) $J_1 - J_2$.

Definizione [Dominanza degli esiti e delle strategie] *Data una strategia $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}$, si dice che la coppia di esiti $J_1(u_1, u_2), J_2(u_1, u_2)$ è dominata, se esiste un'altra coppia $J_1(v_1, v_2), J_2(v_1, v_2)$ con $(v_1, v_2) \in \mathcal{C}$ tale che:*

$$\begin{cases} J_1(v_1, v_2) \geq J_1(u_1, u_2) \\ J_2(v_1, v_2) \geq J_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

ed almeno una delle disuguaglianze è stretta.
La coppia di strategie (v_1, v_2) si dice dominante rispetto a (u_1, u_2) e la strategia (u_1, u_2) si dice dominata.

Questo significa che scegliendo la coppia di strategie (v_1, v_2), invece di (u_1, u_2), uno o entrambi i giocatori hanno un guadagno maggiore senza che l'altro subisca una perdita. Se esiste una coppia (u_1^d, u_2^d) dominante rispetto a tutte le strategie $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}$, allora (u_1^d, u_2^d) si dice strategia dominante. Nel caso di gioco bimatriciale, una strategia (i^d, j^d) si dice dominante se risulta:

$$\begin{cases} a_{i^d, j^d} \geq a_{ij} & \text{per ogni } i, j \\ b_{i^d, j^d} \geq b_{ij} & \text{per ogni } i, j \end{cases}$$

con almeno una disuguaglianza stretta.

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 5 *Sia dato il gioco bimatrice definito da:*

$$\begin{bmatrix} (100, 100) & (0, 0) \\ (0, 0) & (100, 99) \end{bmatrix}$$

L'esito $(100, 100)$ domina tutti gli altri e la corrispondente strategia dominante è la $(1, 1)$ (prima riga prima colonna).

Non è detto che esista sempre un esito dominante. Ad esempio:

Esempio 6 *Sia dato il gioco definito dalla seguente matrice*

$$\begin{bmatrix} (100, 99) & (98, 101) \\ (101, 98) & (99, 100) \end{bmatrix}$$

Per questo gioco non esiste esito dominante.

Si introduce allora il concetto di esito non dominato cioè di un esito per cui non ne esiste un altro che lo domina.
Definizione [Esito non dominato e Ottimo di Pareto] *Data una strategia $({u^p}_1, {u^p}_2)$, l'esito $(J_1(u_1^p, u_2^p), J_2(u_1^p, u_2^p))$ si dice ottimo di Pareto o esito non dominato se non esiste una coppia di strategie $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}$ tale che*

$$\begin{cases} J_1(u_1, u_2) \geq J_1(u_1^p, u_2^p) \\ J_2(u_1, u_2) \geq J_2(u_1^p, u_2^p) \end{cases}$$

ed almeno una delle disuguaglianze è stretta.

Ovviamente un esito dominante è anche non dominato ma non vale il viceversa, cioè un esito non dominato non è necessariamente dominante.

Nell'esempio 2 sono esiti non dominati (-2,-2), (-20,0), (0,-20). Nell'esempio 3 sono esiti non dominati (1,4) e (4,1). Nell'esempio 4 sono esiti non dominati (1,1), (2,1-ε), (1-ε,2).

L'insieme degli esiti non dominati costituisce la frontiera efficiente. La scelta di un punto della frontiera efficiente corrisponde a utilizzare un criterio cooperativo, cioè a scegliere la soluzione che rispetto alle altre è migliore per entrambi i giocatori.

In generale però possono esistere diverse strategie non dominate. Si tratta allora di scegliere fra infinite soluzioni e quindi di trovare un accordo tra diverse possibili strategie non dominate. L'adozione di un comportamento cooperativo dei giocatori non è sempre accettabile. Infatti non solo è necessario supporre che che vi sia completo scambio di informazione tra i giocatori, ma anche che, una volta stabilita la strategia ottima, ogni giocatore decida realmente di adottarla. Infatti, in assenza di vincoli che costringano il giocatore a giocare effettivamente la strategia stabilita, ciascuno potrebbe essere tentato, ferma restando la strategia dell'avversario, di adottare la strategia che gli consente di massimizzare il suo guadagno. In questo modo adotterebbe un criterio non-cooperativo che potrebbe anche non trovarsi sulla frontiera efficiente.

Criterio di soluzione non cooperativo

Dal paragrafo precedente è chiaro che un equilibrio di Pareto non rappresenta una soluzione "stabile". La questione è determinare, se esiste, una coppia (u_1, u_2) tale che chiunque decida di deviare unilateralmente da essa causi il suo proprio danno o comunque non ottenga alcun beneficio, cioè una soluzione in cui trovandovisi, nessun giocatore abbia interesse ad allontanarsene. Si tratta quindi di trovare un criterio di soluzione non cooperativo.

Definizione [Equilibrio di Nash] *Una strategia $({u^n}_1, {u^n}_2) \in \mathcal{C}$ è un equilibrio di Nash se valgono simultaneamente le due disuguaglianze:*

$$\begin{array}{lcl} J_1({u^n}_1, {u^n}_2) \geq J_1(u_1, {u^n}_2), & \textit{per ogni} & u_1 \in \mathcal{U}_1, \\ J_2({u^n}_1, {u^n}_2) \geq J_2({u^n}_1, u_2) & \textit{per ogni} & u_2 \in \mathcal{U}_2. \end{array}$$

□

Ciascun giocatore quindi non ha interesse a deviare dalla situazione di equilibrio perché qualunque cambiamento unilaterale non consente di ottenere un miglioramento.
Osserviamo che un equilibrio di Nash potrebbe non trovarsi sulla frontiera efficiente, cioè potrebbe essere dominato. Inoltre non è garantita, in generale, nè l'esistenza nè la unicità di un equilibrio di Nash.

Nel caso di giochi matriciali in cui J_1, J_2 sono rappresentate rispettivamente dalle matrici $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$ e $\mathcal{B} = \{b_{ij}\}$ un equilibrio di Nash è una coppia (n_1, n_2) con n_1 strategia del giocatore riga e n_2 strategia del giocatore colonna che soddisfa le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{cases} a_{n_1 n_2} \geq a_{i n_2} & \text{per ogni} \quad i = 1, \dots, m \\ b_{n_1 n_2} \geq b_{n_1 j} & \text{per ogni} \quad j = 1, \dots, n \end{cases}$$

In questo caso possiamo quindi anche scrivere

$$a_{n_1 n_2} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{i n_2},$$

$$b_{n_1 n_2} = \max_{1 \leq j \leq n} b_{n_1 j}.$$

Relazioni Maxmin e Minmax

Dato un gioco in forma normale, ciascun giocatore può avere interesse ad identificare la strategia che gli consente di massimizzare il suo guadagno minimo. Supponiamo allora che esistano le quantità $\max_{u_1 \in U_1} \min_{u_2 \in U_2} J_1(u_1, u_2)$ e $\max_{u_2 \in U_2} \min_{u_1 \in U_1} \mathcal{J}_2(u_1, u_2)$. Possiamo allora definire le quantità (*valore Maxmin*)

$$g_1 = \max_{u_1 \in U_1} \min_{u_2 \in U_2} J_1(u_1, u_2)$$

$$g_2 = \max_{u_2 \in U_2} \min_{u_1 \in U_1} J_2(u_1, u_2).$$

che rappresentano rispettivamente il *guadagno minimo garantito* per il giocatore 1 (riga), e per il giocatore 2 (colonna), cioè l'utilità che un giocatore può garantire a se stesso qualunque cosa faccia l'avversario. Si definisce *strategia Maxmin* del giocatore 1, la strategia $\tilde{u}_1 \in U_1$ per cui è raggiunto il valore g_1. Analogamente per il giocatore 2 la strategia Maxmin è la strategia $\tilde{u}_2 \in U_2$ per cui si raggiunge il valore g_2.
La strategia Maxmin corrisponde ad adottare la strategia a "minimo rischio"; per questo la strategia Maxmin è chiamata anche *livello di sicurezza* del giocatore.
In un gioco matriciale in cui le funzioni di utilità sono date dalle matrici $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$, il livello si sicurezza, ovvero il criterio Maxmin si calcola:

$$\begin{array}{ll} a_g = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} & \text{per il giocatore riga} \\ b_g = \max_{1 \leq j \leq n} \min_{1 \leq i \leq m} b_{ij} & \text{per il giocatore colonna} \end{array}$$

Esempio 7 *Sia dato il gioco bimatrice definito da:*

$$\begin{array}{c} \\ r_1 \\ \\ r_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} (2,2) & (3,3) \\ & \\ (3,2) & (1,3) \end{bmatrix} \end{array}$$

Per il giocatore riga la strategia Maxmin è

$$\max\{\min\{2,3\}, \min\{3,1\}\} = \max\{2,1\} = 2$$

e corrisponde a giocare la strategia di riga r_1. Per il giocatore colonna si ha

$$\max\{\min\{2,2\}, \min\{3,3\}\} = \max\{2,3\} = 3$$

e la strategia Maxmin corrisponde a giocare la strategia di colonna c_2.

Ogni giocatore può sempre calcolare il proprio livello di sicurezza, conoscendo solo le proprie strategie. Giocare la strategia corrispondente al Maxmin corrisponde ad adottare un criterio difensivo, perchè cautela della peggiore possibilità. In un gioco matriciale a due persone la strategia Maxmim esiste sempre anche quando non c'è una strategia dominante.

Esempio 8 *Sia dato il gioco:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (2,3) & (4,4) \\ (1,2) & (3,4) \end{bmatrix} \end{array}$$

Per il giocatore riga, la strategia dominante corrisponde alla prima riga (r_1 domina r_2); per il giocatore colonna la strategia dominante corrisponde alla seconda colonna (c_2 domina c_1). Queste strategie corrispondono ad adottare la strategia maxmin per entrambi.

Esempio 9 *Sia dato il gioco:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (2,3) & (4,4) \\ (1,4) & (3,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Per il giocatore riga, la strategia dominante corrisponde alla prima riga (r_1 domina r_2); per il giocatore colonna non esiste una strategia dominante. Però esiste il maxmin di colonna che corrisponde alla strategia c_1 (prima colonna).

Esempio 10 *Sia dato il gioco:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (2,3) & (4,4) \\ (3,4) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Non esiste una strategia dominante né per il giocatore riga né per il giocatore colonna. Esiste però la strategia Maxmin sia per il giocatore riga che per il giocatore colonna che corripondono rispettivamente alla strategia r_1 e c_1.

Dato un gioco in forma normale possiamo definire, se esiste, per il giocatore 1 la quantità (*valore Minmax*)

$$v_1 = \min_{u_2 \in U_2} \max_{u_1 \in U_1} \; J_1(u_1, u_2)$$

che corrisponde al livello di utilità che il giocatore avversario 2, gli può imporre. In questo senso si chiama spesso *vulnerabilità* del giocatore riga. La *strategia Minmax* corrispondente alla vulnerabilità di riga, è una strategia del giocatore 2 $\tilde{u}_2 \in U_2$.
Analogamente per il giocatore 2 possiamo definire la sua vulnerabilità

$$v_2 = \min_{u_1 \in U_1} \max_{u_2 \in U_2} \; J_2(u_1, u_2)$$

che corrisponde ad una strategia Minmax del giocatore 1.
Per calcolare la propria strategia Minmax è necessario però la conoscenza della funzione di utilità dell'avversario, cioè dobbiamo essere nella condizione di gioco con informazione. Inoltre, poiché la strategia Minmax di un giocatore dipende solo dai costi dell'avversario e non dai propri, giocando la propria strategia Minmax (per "non favorire" l'avversario) un giocatore può anche essere danneggiato. Giocare la strategia corrispondente al Minmax corrisponde ad adottare un criterio offensivo, potrebbe quindi essere una strategia irrazionale per chi la adotta.
Nel caso di gioco matriciale in cui le funzioni di utilità sono date dalle matrici $A = \{a_{ij}\}$ e $B = \{b_{ij}\}$, la vulnerabilità di riga è:

$$a_v = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}$$

e la colonna k per cui si raggiunge il minimo corrisponde ad una strategia Minmax di colonna. La vulnerabilità colonna è:

$$b_v = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} b_{ij}$$

e la riga h per cui si raggiunge il minimo corrisponde ad una strategia Minmax di riga.

Esempio 11 *Sia dato il gioco:*

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (1,2) & (3,2) \\ (2,3) & (3,3) \end{bmatrix} \end{array}$$

La vulnerabilità di riga è $\min\{\max\{1,2\}, \max\{3,3\}\} = \min\{2,3\} = 2$ *che corrisponde alla strategia di colonna* c_1*, mentre per colonna è* $\min\{\max\{2,2\}, \max\{3,3\}\} = \min\{2,3\} = 2$ *che corrisponde alla strategia di riga* r_1*.*

Inoltre per qualunque funzione J definita nello spazio $U_1 \times U_2$ per cui esistono le quantità $\max_{u_1} \min_{u_2} \; J(u_1, u_2)$ e $\min_{u_2} \max_{u_1} \; J(u_1, u_2)$ valgono le seguenti considerazioni.
Risulta

$$J(u_1, u_2) \leq \max_{u_1} \; J(u_1, u_2) \quad \text{per ogni } u_1 \in U_1$$

e quindi in particolare anche

$$\min_{u_2} \; J(u_1, u_2) \leq \min_{u_2} \max_{u_1} \; J(u_1, u_2).$$

Ma per l'arbitrarietà nella scelta di $u_1 \in U_1$ si ottiene

$$\max_{u_1} \min_{u_2} \; J(u_1, u_2) \leq \min_{u_2} \max_{u_1} \; J(u_1, u_2) \tag{1.1}$$

Poichè vale sempre la relazione (1.1), la differenza

$$\min_{u_2} \max_{u_1} \; J(u_1, u_2) - \max_{u_1} \min_{u_2} \; J(u_1, u_2)$$

rappresenta l'aumento di guadagno che ciascun giocatore si può assicurare dovuto all'informazione che ha sulla strategia adottata dal giocatore avversario.

Vediamo ora la relazione tra equilibrio di Nash e strategie di Maxmin e Minmax. Osserviamo che dalla definizione di equilibrio di Nash, si ha[1]

$$\begin{aligned} J_1({u_1}^n, u_2^n) &= \max_{u_1} J_1(u_1, u_2^n) \\ J_2({u_1}^n, u_2^n) &= \max_{u_2} J_2({u_1}^n, u_2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Da (1.2) e (1.1), quando esiste un equilibrio, si può scrivere

$$\begin{aligned} J_1({u_1}^n, u_2^n) \geq \min_{u_2} \max_{u_1} J_1(u_1, u_2) \geq \max_{u_1} \min_{u_2} J_1(u_1, u_2) \\ J_2(u_1^n, u_2^n) \geq \min_{u_1} \max_{u_2} J_2(u_1, u_2) \geq \max_{u_2} \min_{u_1} J_2(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Nel caso di giochi matriciali, queste relazioni si scrivono:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \leq \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} \leq a_{n_1 n_2} \\ \max_{1 \leq j \leq n} \min_{1 \leq i \leq m} b_{ij} \leq \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} b_{ij} \leq b_{n_1 n_2} \end{aligned}$$

in cui n_1, n_2 indicano rispettivamente la riga e la colonna che individuano l'equilibrio di Nash.

Equilibrio di Nash forte

Si supponga che un giocatore adotti la sua stategia di equilibrio di Nash (per semplicità supponiamola unica). Ogni deviazione dall'equilibrio danneggia il giocatore che se ne allontana; un avversario razionale, quindi non ha alcun interesse ad adottare una strategia diversa dall'equilibrio di Nash. Può verificarsi, però, che un giocatore decida (irrazionalmente) di allontanarsi dall'equilibrio, per imporre all'avversario il suo Minmax. Questo chiaramente è possibile solo se la strategia di equilibrio di Nash è diversa da quella di Minmax. Un equilibrio si dice forte (o "a prova di irrazionalità") se chiunque si allontana da esso, non solo danneggia se stesso, ma non danneggia l'avversario. Matematicamente un equilibrio è a prova di irrazionalità se valgono simultaneamente le relazioni:

$$J_1(u_1^n, u_2) \geq J_1(u_1^n, u_2^n) \geq J_1(u_1, u_2^n) \quad \text{per ogni } u_1 \in \mathcal{U}_1,\ u_2 \in \mathcal{U}_2$$

$$J_2(u_1, u_2^n) \geq J_2(u_1^n, u_2^n) \geq J_2(u_1^n, u_2) \quad \text{per ogni } u_1 \in \mathcal{U}_1,\ u_2 \in \mathcal{U}_2.$$

Se l'equilibrio è forte valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \max_{u_1} \min_{u_2} J_1(u_1, u_2) \geq J_1(u_1^n, u_2^n) \geq \min_{u_2} \max_{u_1} \mathcal{J}_1(u_1, u_2) \\ \max_{u_2} \min_{u_1} J_2(u_1, u_2) \geq J_2(u_1^n, u_2^n) \geq \min_{u_1} \max_{u_2} \mathcal{J}_2(u_1, u_2) \end{aligned}$$

che insieme alla (1.1) implicano

$$\begin{aligned} J_1({u_1}^n, u_2^n) = \min_{u_2} \max_{u_1} \mathcal{J}_1(u_1, u_2) = \max_{u_1} \min_{u_2} J_1(u_1, u_2) \\ J_2(u_1^n, u_2^n) = \min_{u_1} \max_{u_2} J_2(u_1, u_2) = \max_{u_2} \min_{u_1} J_2(u_1, u_2) \end{aligned}$$

[1]Se esistono le quantità $\max_{u_1} J_1(u_1, u_2^n)$ e $\max_{u_2} J_2(u_1^n, u_2)$

e quindi le strategie di equilibrio e di Minmax coincidono. Nel caso matriciale le relazioni si scrivono

$$\min_{1\le j\le m}\max_{1\le i\le n} a_{ij} = a_{n_1 n_2} = \max_{1\le i\le n}\min_{1\le j\le m} a_{ij}$$
$$\min_{1\le i\le n}\max_{1\le j\le m} b_{ij} = b_{n_1 n_2} = \max_{1\le j\le m}\min_{1\le i\le n} b_{ij}$$

Esempio 12 *Sia dato il gioco:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (1,2) & (2,3) \\ (3,2) & (3,3) \end{bmatrix} \end{array}$$

La strategia corripondente alle utilità (3,3) è equilibrio a prova di irrazionalità; infatti allontanandosi dall'equilibrio non si danneggia l'avversario.

Esempio 13 *Sia dato il gioco:*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} & \begin{bmatrix} (3,3) & (2,4) \\ (4,2) & (1,1) \end{bmatrix} \end{array}$$

In questo caso ci sono due equilibri $(2,4)$ *e* $(4,2)$ *ed entrambi non sono a prova di irrazionalità.*

Esempio 14 [Il dilemma del prigioniero] *Consideriamo il gioco dell'Esempio 2 la cui matrice è*

	C	*N*
C	*(2,2)*	*(20,0)*
N	*(0,20)*	*(8,8)*

e si vuole minimizzare.

Ci sono tre ottimi di Pareto che corrispondono alle strategie (C,C), (C,N), (N,C). Ma c'è un unico equilibrio di Nash che corrisponde alla strategia (N,N) = (8,8) ed è un equilibrio dominato. Consideriamo le strategie Minmax e Maxmin.

Per quanto riguarda il giocatore riga

			Max	
	2	*20*	*20*	
	0	*8*	*8*	*Minmax=8*
min	*0*	*8*		
	Maxmin=8			

Quindi il Minmax =Maxmin =8.

Per quanto riguarda il giocatore colonna:

			Min	
	2	*0*	*0*	
	20	*8*	*8*	*Maxmin=8*
Max	*20*	*8*	*8*	
	Minmax=8			

Il Minmax è 8. Si tratta quindi di un equilibrio a prova di irrazionalità.
Notare che una soluzione di tipo cooperativo avrebbe consentito di scegliere una pena di soli 2 anni.

Esempio 15 [La battaglia dei sessi] *Consideriamo il gioco dell'Esempio 3 la cui matrice è*

		Lei	
		P	*G*
	P	*(4,1)*	*(0,0)*
Lui			
	G	*(0,0)*	*(1,4)*

Esistono due equilibri di Nash (4,1), (1,4), uno preferito da Lei e l'altro da Lui. Entrambi non sono a prova di irrazionalità.

1.3.2 Gioco a somma nulla

Definizione *Si dice gioco a somma nulla un gioco per cui vale la relazione*

$$\sum_{i=1}^{n} J_i(u) = 0 \qquad \textit{per ogni} \;\; u \in \mathcal{C}.$$

Nel caso di gioco a 2-persone questo significa che quello che uno vince, l'altro lo perde:

$$J_1(u) + J_2(u) = 0 \qquad \text{per ogni} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in U_1 \times U_2$$

Si tratta cioè di giochi di puro antagonismo per cui non ha senso cercare una soluzione cooperativa.

Strategie pure

In questo caso, il gioco matriciale si rappresenta in questo modo

$$\begin{bmatrix} a_{11}, -a_{11} & a_{12}, -a_{12} & \dots & a_{1n}, -a_{1n} \\ a_{21}, -a_{21} & a_{22}, -a_{22} & \dots & a_{2n}, -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}, -a_{m1} & a_{m2}, -a_{m2} & \dots & a_{mn}, -a_{mn} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dove si intende che $a_{ij} > 0$ sia un guadagno per il giocatore riga e una perdita per il giocatore colonna.

SI verifica facilmente che non esistono esiti dominanti, tutta le strategie corrispondono a ottimi di Pareto. Per quanto riguardo gli equilibri di Nash, dalla definizione e dato che $J = J_1 = -J_2$ si ottiene la seguente relazione:

$$J(u_1, {u_2}^n) \;\leq\; J({u_1}^n, {u_2}^n) \;\leq J({u_1}^n, u_2) \qquad \text{per ogni} u_1 \in \mathcal{U}_1 \; u_2 \in \mathcal{U}_2 \tag{1.3}$$

cioè la strategia di equilibrio $({u_1}^n, {u_2}^n)$ è un punto di sella per la funzione $J(u_1, u_2)$. Dalla (1.3) segue

$$\max_{u_1} J(u_1, {u_2}^n) = J({u_1}^n, {u_2}^n) \ = \min_{u_2} J({u_1}^n, u_2).$$

Da queste considerazioni si ottiene il seguente risultato:

Teorema. *In un gioco a somma nulla, se la funzione J è limitate esiste un equilibrio $({u_1}^n, {u_2}^n)$ di Nash se e solo se vale la relazione*

$$\max_{u_1} \min_{u_2} J(u_1, u_2) = \min_{u_2} \max_{u_1} J(u_1, u_2)$$

Vedi [1].

Esempio 16 *Sia dato il gioco*

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ & \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Non c'è equilibrio,infatti il Maxmin di riga è 3 mentre il Minmax di colonna è 4.

Esempio 17 *Sia dato il gioco*

	c_1	c_2	c_3	c_4		
r_1	*7*	*1*	*8*	*4*	*1*	
r_2	*5*	*4*	*6*	*7*	*4*	*Maxmin*
r_3	*6*	*2*	*-3*	*6*	*-3*	
	7	*4*	*8*	*7*		
		Minmax				

In questo caso c'è equilibrio,infatti il Maxmin di riga è 4 ed il Minmax di colonna è 4.

Strategie miste

Sia data la matrice del gioco $\mathcal{A} = \{a_{ij}\}$ con $i = 1 \dots m$ e $j = 1 \dots n$, cioè i guadagni relativi delle strategie pure del giocatore 1 rispetto al giocatore 2 Se il giocatore 1 "gioca" la strategia i ed il giocatore 2 risponde con strategia j, il giocatore 1 guadagna a_{ij} (perde se $a_{ij} < 0$).

Definizione. *Dato un gioco in forma normale, si dice strategia mista per il giocatore $i \in \mathcal{N}$, ogni misura di probabilità sull'insieme delle strategie pure U_i del giocatore i.*

Nel caso di gioco matriciale a 2 persone, si ha $U_1 = \{1 \dots m\}$, $U_2 = \{1 \dots n\}$. Quindi una strategia mista S_i per il giocatore i è un vettore $p^{(i)} \in \mathbb{R}^{|U_i|}$ tale che

$$p^{(i)} = (p_1^{(i)} \dots p_{|U_i|}^{(i)})$$
$$\sum_{k=1}^{|U_i|} p_k^{(i)} = 1$$
$$p_k^{(i)} \geq 0$$

Rappresenta quindi la probabilità (o frequenza) con cui viene giocata la strategia pura k-esima con $k = 1 \dots |U_i|$. Indichiamo allora con $p^{(1)} \in S_1$ il vettore strategia mista del giocatore 1 ($p^{(1)} \in \mathbb{R}^m$) e con $p^{(2)} \in S_2$ il vettore strategia mista del giocatore 2 ($p^{(2)} \in \mathbb{R}^n$). Si definisce la funzione di utilità in strategie miste come segue:

$$\tilde{J} = p^{(1)T} \mathcal{A} p^{(2)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^{(1)} p_j^{(2)}$$

Quindi la coppia $(\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2, \tilde{J})$ definisce un nuovo gioco a 2 persone a somma nulla in cui lo scopo dei giocatori è la massimizzazione dell'utilità.

Naturalmente le strategie pure sono un caso particolare delle strategie miste che corrispondono a $p^{(i)} = \delta(k)$ dove $\delta(k)$ è un vettore a componenti tutte nulle esclusa la k-esima, cioè

$$\delta(k) = (0 \dots 0, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

Esempio 18 *Sia dato il gioco*

	q	*1-q*
p	*2*	*5*
1-p	*4*	*3*

In strategie pure non c'è equilibrio. Supponiamo di giocare in strategie miste e siano $S_1 = \{p, 1-p\}$ ed $S_2 = \{q, 1-q\}$ gli insiemi di strategie miste dei due giocatori. La funzione di utilità del giocatore 1 é:

$$\tilde{J}_1 = [2q + 5(1-q)]p + [4q + 3(1-q)](1-p)$$

mentre per il giocatore 2 si ha:

$$\tilde{J}_2 = [2p + 4(1-p)]q + [5p + 3(1-p)](1-q)$$

Naturalmente le due funzioni $\tilde{J}_1, \tilde{J}_2$ sono uguali in modulo ma si deve massimizzare $\tilde{J}_1$ mentre si deve minimizzare $\tilde{J}_2$.

Definizione. *Una coppia $(\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)})$ di strategie miste è un punto di sella della funzione $\tilde{J}(p^{(1)}, p^{(2)})$ se vale*

$$\tilde{J}(p^{(1)}, \bar{p}^{(2)}) \leq \tilde{J}(\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}) \leq \tilde{J}(\bar{p}^{(1)}, p^{(2)})$$

Cioè nel caso di gioco matriciale:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^{(1)} \bar{p}_j^{(2)} \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{p}_i^{(1)} \bar{p}_j^{(2)} \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{p}_i^{(1)} p_j^{(2)}.$$

Si possono naturalmente estendere i concetti di Maxmin Minmax in strategie miste. Si ha per definizione:

$$\min\max \tilde{J} = \min_{p^{(2)}} \quad \max_{p^{(1)}} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^{(1)} p_j^{(2)}$$

$$\max\min \tilde{J} = \max_{p^{(1)}} \quad \min_{p^{(2)}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^{(1)} p_j^{(2)}$$

con $p_i^{(1)} \geq 0$ per ogni i, $p_j^{(2)} \geq 0$ per ogni j e $\sum_{i=1}^{m} p_i^{(1)} = 1$, $\sum_{j=1}^{n} p_j^{(2)} = 1$.

Si può dimostrare che vale sempre la disuguaglianza

$$\max\min \tilde{J} \leq \min\max \tilde{J}$$

che si trasforma in uguaglianza se e solo se il gioco possiede un punto di sella $(\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)})$.

Teorema fondamentale della teoria di giochi e connessioni con la PL

In questo paragrafo si costrusce una coppia primale-duale di problemi di prgrammazione lineare, la cui soluzione fornisce le strategie ottime di un gioco matriciale.

Il teorema fondamentale della teoria di giochi (Von Neumann) afferma che:

Teorema. *Ogni gioco matriciale a 2-persone a somma nulla ha un punto di sella in strategia mista.*

Questo significa che esiste un valore del gioco v e due strategie miste $(\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)})$ tali che

$$\tilde{J}(p^{(1)}, \bar{p}^{(2)}) \leq v \leq \tilde{\mathcal{J}}(\bar{p}^{(1)}, p^{(2)})$$
$$\tilde{J}(\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)}) = \min_{p^{(2)}} \max_{p^{(1)}} \tilde{J}(p^{(1)}, p^{(2)}) = v = \max_{p^{(1)}} \min_{p^{(2)}} \tilde{J}(p^{(1)}, p^{(2)}).$$

La procedura di calcolo delle strategie ottime $\bar{p}^(1)$ e $\bar{p}^(2)$ e del valore del gioco v si chiama Ricerca della soluzione del gioco.

Dimostrazione del teorema fondamentale della teoria dei giochi (vedi [4]). Si può supporre senza perdere di generalità che gli elementi a_{ij} della matrice siano positivi. Infatti ci si può facilmente ricondurre a questo caso; sia

$$0 > \bar{a} = \min_{i,j} \; a_{ij}$$

e si consideri un valore $\widehat{a} > -\bar{a}$.

Consideriamo la matrice $\widehat{A}$ i cui elementi sono $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} + \widehat{a}$ e quindi sono tutti positivi. La funzione di utilità corrispondente a $\widehat{A}$ è la seguente:

$$\widehat{J}(p^{(1)}, p^{(2)}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + \widehat{a}) p_i^{(1)} p_j^{(2)}$$
$$= \tilde{J}(p^{(1)}, p^{(2)}) + \widehat{a} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i^{(1)} p_j^{(2)} = \tilde{J}(p^{(1)}, p^{(2)}) + \widehat{a}$$

Quindi $\widehat{J}$ differisce da $\tilde{J}$ solo per una costante $\widehat{a}$. Quindi un punto di sella per $\widehat{J}$ lo è anche per $\tilde{\mathcal{J}}$ (equivalenza strategica).

Consideriamo ora la seguente coppia di problemi di programmazione lineare primale-duale

$$\begin{array}{cccc} & \min \quad {e_m}^T x & \max {e_n}^T y & \\ (P) & A^T x \geq e_n & Ay \leq e_m & (D) \\ & x \geq 0 & y \geq 0 & \end{array}$$

dove $e_m = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$, $e_n = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$.

Poiché A ha elementi tutti positivi, sia il problema primale (P) che il problema duale (D) sono ben posti, cioè il corrispondente poliedro ammissibile è non vuoto. Infatti per il problema (P) è sufficiente prendere un vettore x a componenti sufficientemente "grandi", tale che $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq 1$ per ogni $j = 1, \ldots, n$. Mentre per il problema (D) il vettore $y = 0$ è ammissibile.

Per un noto teorema sulla dualità, si può concludere che esistono le soluzioni ottime x^* ed y^* rispettivamente per (P) e (D) ed il valore ottimo delle funzioni obiettivo coincide. Indichiamo questo valore con $\frac{1}{v}$, quindi si ha:

$$e_m^T x^* = e_n^T y^* = \frac{1}{v}$$

cioè

$$\sum_{i=1}^m x_i^* = \sum_{j=1}^n y_i^* = \frac{1}{v}.$$

Poichè A ha elementi tutti positivi, dal vincolo primale $A^T x \geq e_n$ si ha che $x^* \neq 0$ e quindi il valore del gioco $v > 0$. Si può porre

$$\begin{aligned} \bar{p}^{(1)} &= v x^* \\ \bar{p}^{(2)} &= v y^* \end{aligned}$$

e naturalmente

$$\bar{p}^{(1)} \geq 0, \qquad \bar{p}^{(2)} \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^m \bar{p}_i^{(1)} = 1, \qquad \sum_{i=1}^n \bar{p}_j^{(2)} = 1,$$

quindi $(\bar{p}^{(1)}, \bar{p}^{(2)})$ rappresentano delle possibili strategie. Si deve ora dimostrare che con questa scelta, $\bar{p}^{(1)}$ e $\bar{p}^{(2)}$ sono un punto di sella per il gioco definito dalla matrice A.

Poichè x^* ed y^* sono soluzioni rispettivamente di (P) e (D) si ha:

$$\begin{array}{c} A^T x^* \geq e_n \\ A y^* \leq e_m \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} A^T \bar{p}^{(1)} \geq e_n v \\ A \bar{p}^{(2)} \leq e_m v \end{array}$$

Se si moltiplica scalarmente la prima relazione per un qualsiasi vettore $p^{(2)} \geq 0$ di dimensione n tale che

$$\sum_{j=1}^n p_j^{(2)} = 1$$

si ottiene

$$\bar{p}^{(1)T} A p^{(2)} \geq v$$

e analogamente moltiplicando scalarmente la seconda relazione per un qualsiasi $p^{(1)} \geq 0$ di dimensioni m tale che $\sum_{i=1}^m p_i^{(1)} = 1$ si ottiene:

$$p^{(1)T} A \bar{p}^{(2)} \leq v.$$

Da queste due relazioni si ha: cioè

$$p^{(1)T} A \bar{p}^{(2)} \leq v \leq \bar{p}^{(1)T} A p^{(2)}$$

quindi questo significa che $\bar{p}^{(1)}$ e $\bar{p}^{(2)}$ sono le strategie ottime e v è il valore del gioco.$\square$

Nel corso della dimostrazione si è definita una coppia primale-duale la cui soluzione definisce le strategie ottime ed il valore del gioco (quando $a_{ij} > 0$).

In particolare si possono definire i due problemi

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \quad j = 1 \ldots n \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1 \ldots m; \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & \sum_{j=1}^{n} y_i \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1 \quad i = 1 \ldots m \\ & y_j \geq 0 \quad j = 1 \ldots n. \end{array}$$

Le strategie ottime sono date da:

$$\bar{p}_i^{(1)} = \frac{x_i^*}{\sum_i x_i^*}, \qquad \bar{p}_j^{(2)} = \frac{y_j^*}{\sum_j y_j^*}$$

ed il valore del gioco

$$v = \frac{1}{\sum x_i^*} = \frac{1}{\sum y_j^*}$$

Questa trasformazione in un problema di PL é possibile solo se gli elementi $a_{ij} > 0$.

Esempio 19 *Riprendiamo l'esempio 18:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

In questo caso per trovare la strategia di equilibrio (p_e, q_e) *si deve risolvere il problema*

$$\max_p \min_q \tilde{J}_1(p, q) = \tilde{J}(p_e, q_e) = \min_q \max_p \tilde{J}_2(p, q).$$

Questo equivale a risolvere i due problemi di programmazione lineare:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & 5x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & y_1 + y_2 \\ & 2y_1 + 5y_2 \leq 1 \\ & 4y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

Riferimenti

[1] S. Achnanov, "Programmation lineaire". Editions MIR. Moscow 1984.

[2] P. Caravani, "Modelli e Simulazione di Sistemi". Aracne Editrice 1992.

[3] D. Fudenberg e J. Tiroli, "Game theory". The MIT Press Cambridge, Massachusetts, London 1991.

[4] E. Golstein, "Problemes Particuliers de la programmation lineaire". Editions MIR. Moscon 1973.

[5] L.A. Petrosjan, N.A. Zenkevich, "Game theory". World Scientific Publishing Co., 1996.