

Problemi di equilibrio di Nash generalizzati

Simone Sagratella

December 21, 2011

1 Introduzione

I problemi di equilibrio di Nash generalizzati, o per brevità GNEP (generalized Nash equilibrium problem), sono una generalizzazione dei problemi di ottimizzazione. Molti problemi di natura ingegneristica, economica, meccanica o elettronica, per la loro complessità strutturale, non possono essere modellati come problemi di ottimizzazione, ma ricadono nella più generale classe dei GNEP [5].

In questo primo capitolo si introducono i GNEP definendone le caratteristiche principali, in particolare si parte dalla definizione di problema di ottimizzazione per arrivare a quella di GNEP.

Un problema di ottimizzazione è caratterizzato da una funzione obiettivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e da $p + m$ vincoli $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ che definiscono un insieme ammissibile:

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ h(x) = 0 \\ g(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Per esempio il seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \min_x (x_1)^2 + (x_2)^2 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

ha $n = 2$ variabili x_1 e x_2 , $p = 1$ vincoli di uguaglianza e $m = 2$ vincoli di disuguaglianza, e quindi $f(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2$, $h_1(x) = x_1 + x_2 - 1$, $g_1(x) = -x_1$ e $g_2(x) = -x_2$.

I problemi di ottimizzazione sono naturalmente caratterizzati dalla presenza di un unico decisore che controlla tutte le variabili in gioco. In un GNEP invece **sono presenti più decisori** che possono controllare solo una parte delle variabili in gioco per risolvere ognuno un proprio problema di ottimizzazione che potrebbe dipendere anche dalle variabili degli altri decisori. Formalmente in un GNEP ci sono N decisori (che da ora in poi chiameremo

giocatori), ogni giocatore $\nu \in \{1, \dots, N\}$ controlla delle variabili di decisione $x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}$ e deve risolvere un problema di ottimizzazione caratterizzato da una funzione obiettivo $f_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e da $p_\nu + m_\nu$ vincoli $h^\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{p_\nu}$ e $g^\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_\nu}$ che definiscono un insieme ammissibile ¹:

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu} f_\nu(x) \\ h^\nu(x) = 0 \\ g^\nu(x) \leq 0, \end{aligned}$$

dove $x = (x^\nu)_{\nu=1}^N \in \mathbb{R}^n$, ovvero x è l'unione delle variabili di tutti i giocatori. Quindi il GNEP ha in tutto $n = \sum_{\nu=1}^N n_\nu$ variabili x , N funzioni obiettivo f , $p = \sum_{\nu=1}^N p_\nu$ vincoli di uguaglianza h , e $m = \sum_{\nu=1}^N m_\nu$ vincoli di disuguaglianza g .

Facciamo un piccolo esempio per chiarire meglio il concetto. Si consideri il seguente GNEP ²

$$\begin{array}{ll} P1 : & \min_{x^1} x_1^1 x_1^2 + x_2^1 \\ & x_1^1 + x_2^1 - 1 \leq 0 \\ & -x_1^1 \leq 0 \\ & -x_2^1 \leq 0 \\ P2 : & \min_{x^2} (x_1^2)^2 + x_2^2 \\ & x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \\ & -x_1^2 \leq 0 \\ & -x_2^2 \leq 0 \end{array}$$

analizziamone le caratteristiche principali:

- ci sono 2 giocatori;
- il primo giocatore ha possibilità di modificare le variabili x^1 per risolvere il problema $P1$ e risulta $n_1 = 2$, $p_1 = 0$ e $m_1 = 3$ (ovvero ha 2 variabili, 0 vincoli di uguaglianza e 3 vincoli di disuguaglianza);
- il secondo giocatore ha possibilità di modificare le variabili x^2 per risolvere il problema $P2$ e risulta $n_2 = 2$, $p_2 = 1$ e $m_2 = 2$ (ovvero ha 2 variabili, 1 vincolo di uguaglianza e 2 vincoli di disuguaglianza);
- il primo giocatore ha la sola funzione obiettivo che dipende anche dalle variabili dell'altro giocatore;
- il secondo giocatore ha il solo vincolo di uguaglianza che dipende anche dalle variabili dell'altro giocatore;
- il GNEP ha complessivamente $n = n_1 + n_2 = 4$ variabili, $p = p_1 + p_2 = 1$ vincoli di uguaglianza e $m = m_1 + m_2 = 5$ vincoli di disuguaglianza.

¹Fare bene attenzione agli indici: ν identifica il giocatore, x^ν sono le variabili che sono di competenza del giocatore ν , mentre x sono le variabili di tutti i giocatori, f_ν è la funzione obiettivo del giocatore ν che può dipendere dalle variabili di tutti i giocatori, $h^\nu(x) = 0$ e $g^\nu(x) \leq 0$ sono i vincoli del giocatore ν che possono dipendere dalle variabili di tutti i giocatori.

²Le variabili vengono indicate con in apice il numero del giocatore e in pedice il numero della variabile del giocatore. Per esempio x_2^1 è la variabile 2 del giocatore 1.

2 Punti di equilibrio di un GNEP

La soluzione di un GNEP viene chiamata anche **punto di equilibrio**. Trovare una soluzione di un GNEP significa trovare un valore per le variabili di ogni giocatore che ottimizzi i problemi di ottimizzazione di tutti i giocatori congiuntamente. Ovvero, in una soluzione del GNEP nessun giocatore può ridurre ulteriormente la propria funzione obiettivo modificando esclusivamente le proprie variabili. Analizziamo questo concetto con vari esempi.

Esempio 2.1 Si consideri un GNEP con 2 giocatori i cui problemi di ottimizzazione sono

$$P1 : \quad \min_{x^1} x_1^1 \quad \quad \quad P2 : \quad \min_{x^2} (x_1^2)^2 \\ \quad \quad \quad x_1^1 \geq 1$$

Entrambi i giocatori possono modificare una variabile per risolvere il proprio problema di ottimizzazione.

Il primo giocatore ha lo scopo di risolvere il problema di ottimizzazione

$$\min_{x^1} x_1^1 \\ x_1^1 \geq 1$$

Qualunque sia il valore della variabile dell'altro giocatore, la soluzione di questo problema di ottimizzazione è $(x_1^1)^* = 1$. Questo accade perché, in questo problema di ottimizzazione, sia nella funzione obiettivo che nei vincoli non compare mai la variabile x_1^2 dell'altro giocatore.

Il secondo giocatore ha lo scopo di risolvere il problema di ottimizzazione

$$\min_{x^2} (x_1^2)^2$$

Qualunque sia il valore della variabile dell'altro giocatore, la soluzione di questo problema di ottimizzazione è $(x_1^2)^* = 0$. Anche qui il motivo è l'assenza in questo problema della variabile x_1^1 dell'altro giocatore.

In conclusione la soluzione del GNEP è

$$x^* = \begin{pmatrix} (x_1^1)^* \\ (x_1^2)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ovvero x^* è un punto che ottimizza i problemi di ottimizzazione di tutti i giocatori, e quindi nessuno dei due giocatori può ridurre ulteriormente la propria funzione obiettivo modificando la propria variabile. \square

Nel prossimo esempio la situazione viene leggermente complicata.

Esempio 2.2 Si consideri un GNEP con 2 giocatori i cui problemi di ottimizzazione sono

$$\begin{array}{ll}
 P1 : & \min_{x_1} x_1^1 \\
 & x_1^1 \geq 1 \\
 P2 : & \min_{x_2} (x_1^2)^2 \\
 & x_1^2 \geq x_1^1
 \end{array}$$

Rispetto all'esempio 2.1 è stato solo introdotto un vincolo per il secondo giocatore.

Siccome il problema di ottimizzazione del primo giocatore non è cambiato, allora la sua soluzione è come prima $(x_1^1)^* = 1$, qualunque sia il valore della variabile dell'altro giocatore.

Il secondo giocatore ha lo scopo di risolvere il problema di ottimizzazione

$$\begin{array}{l}
 \min_{x_2} (x_1^2)^2 \\
 x_1^2 \geq x_1^1
 \end{array}$$

In questo problema di ottimizzazione compare nel vincolo la variabile x_1^1 dell'altro giocatore. Questo significa che al variare della variabile x_1^1 l'insieme ammissibile si modifica, e quindi anche i punti di ottimo del problema cambiano. Per esempio se $x_1^1 = -1$ il vincolo del problema diventa $x_1^2 \geq -1$ e il punto di ottimo è $(x_1^2)^* = 0$. La figura 1 visualizza il quadro³.

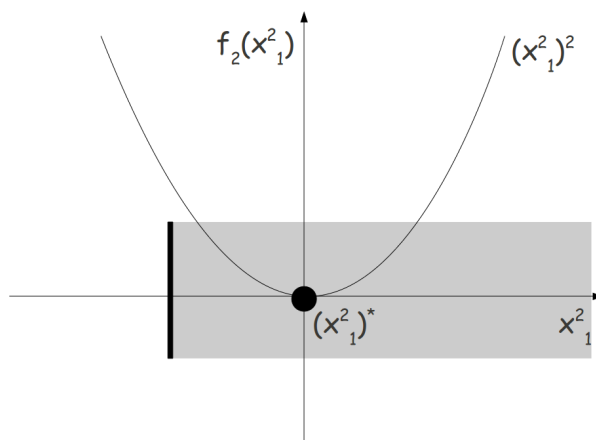


Figure 1: Soluzione ottima $(x_1^2)^*$ del problema del giocatore 2 quando $x_1^1 = -1$.

Invece se $x_1^1 = \frac{1}{2}$ il vincolo del problema diventa $x_1^2 \geq \frac{1}{2}$ e il punto di ottimo è $(x_1^2)^* = \frac{1}{2}$ (figura 2).

³Notate che in questa figura, come in tutte le altre di questo capitolo, si è indicato sull'asse delle ascisse la variabile, mentre sull'asse delle ordinate la funzione obiettivo.

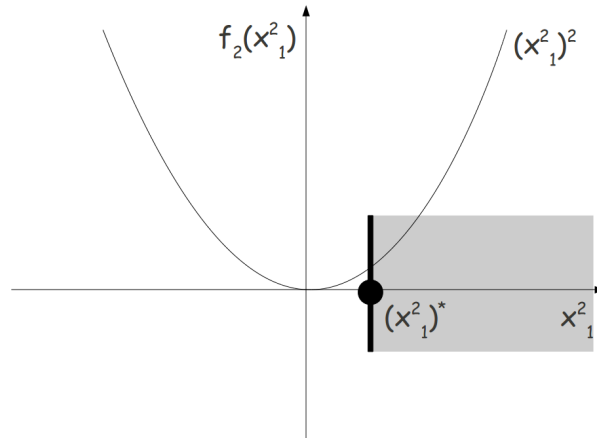


Figure 2: Soluzione ottima $(x_1^2)^*$ del problema del giocatore 2 quando $x_1^1 = \frac{1}{2}$.

Generalizzando possiamo dire che per questo problema di ottimizzazione il punto di ottimo $(x_1^2)^*$ assume questi valori al variare di x_1^1 :

$$(x_1^2)^* = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1^1 \leq 0 \\ x_1^1 & \text{se } x_1^1 > 0 \end{cases}$$

Riassumendo il primo giocatore sceglie sempre il punto $(x_1^1)^* = 1$, mentre il secondo giocatore sceglie $(x_1^2)^*$ in base a come il primo giocatore imposta la variabile x_1^1 . La soluzione del GNEP si ottiene in $(x_1^1)^* = 1$ che è scelto dal giocatore 1 in modo definitivo, e in $(x_1^2)^* = 1$ che viene scelto dal giocatore 2 dopo che il primo giocatore ha fissato $(x_1^1)^*$, quindi

$$x^* = \begin{pmatrix} (x_1^1)^* \\ (x_1^2)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da x^* nessuno dei due giocatori può ridurre la propria funzione obiettivo modificando esclusivamente le proprie variabili:

- il primo giocatore ottimizza il proprio problema di ottimizzazione al meglio in $(x_1^1)^*$;
- il secondo giocatore se potesse modificare anche la variabile x_1^1 , allora la sceglierebbe non positiva, perché così potrebbe scegliere la sua variabile x_1^2 pari a zero e ottenere il minimo valore possibile della funzione obiettivo. Tuttavia il giocatore 2 non può influenzare il valore di x_1^1 che è stato fissato dal giocatore 1 pari a $(x_1^1)^* = 1$. In questa situazione il giocatore 2 ottiene il maggior vantaggio possibile scegliendo $(x_1^2)^* = 1$.

□

Nel prossimo esempio la situazione viene ulteriormente complicata.

Esempio 2.3 Si consideri un GNEP con 2 giocatori i cui problemi di ottimizzazione sono

$$\begin{array}{ll}
 P1 : & \min_{x^1} x_1^1 \\
 & x_1^1 \geq 1 \\
 & x_1^1 \geq 3 - x_1^2 \\
 P2 : & \min_{x^2} (x_1^2)^2 \\
 & x_1^2 \geq x_1^1
 \end{array}$$

Rispetto all'esempio 2.2 è stato solo introdotto un vincolo per il primo giocatore.

Il problema di ottimizzazione del secondo giocatore non è cambiato, e vale ancora la regola

$$(x_1^2)^* = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1^1 \leq 0 \\ x_1^1 & \text{se } x_1^1 > 0 \end{cases}$$

Il primo giocatore deve risolvere il problema di ottimizzazione

$$\begin{array}{l}
 \min_{x^1} x_1^1 \\
 x_1^1 \geq 1 \\
 x_1^1 \geq 3 - x_1^2
 \end{array}$$

In questo problema di ottimizzazione compare nel secondo vincolo la variabile x_1^2 dell'altro giocatore. Questo significa che al variare della variabile x_1^2 l'insieme ammissibile si modifica, e quindi anche i punti di ottimo del problema cambiano. Per esempio se $x_1^2 = 4$ il secondo vincolo del problema diventa $x_1^1 \geq -1$ e quindi l'insieme ammissibile del problema è definito dal solo primo vincolo. Il punto di ottimo in questo caso è $(x_1^1)^* = 1$. La figura 3 illustra quanto appena detto.

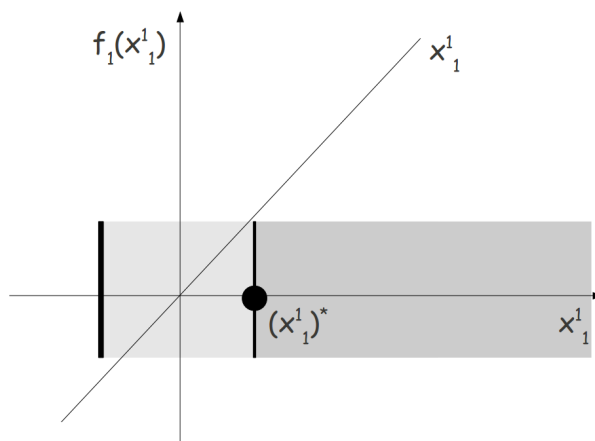


Figure 3: Soluzione ottima $(x_1^1)^*$ del problema del giocatore 1 quando $x_1^2 = 4$.

Se invece $x_1^2 = 1$ il secondo vincolo del problema diventa $x_1^1 \geq 2$ e in questo caso è lui che

domina il primo vincolo e definisce da solo l'insieme ammissibile. Il punto di ottimo in questo caso è $(x_1^1)^* = 2$ (figura 4).

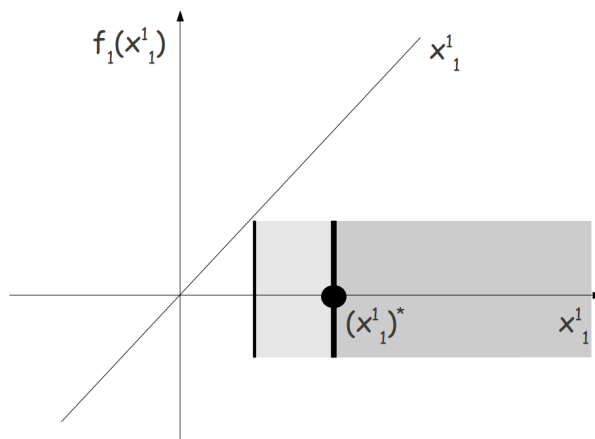


Figure 4: Soluzione ottima $(x_1^1)^*$ del problema del giocatore 1 quando $x_1^2 = 1$.

Quindi stabiliamo che per questo problema di ottimizzazione il punto di ottimo $(x_1^1)^*$ assume i seguenti valori al variare di x_1^2 :

$$(x_1^1)^* = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1^2 \geq 2 \\ 3 - x_1^2 & \text{se } x_1^2 < 2 \end{cases}$$

Determinare una soluzione di questo GNEP significa trovare un punto che verifica contemporaneamente le due regole di ottimo per i due giocatori. Il punto

$$x^* = \begin{pmatrix} (x_1^1)^* \\ (x_1^2)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

verifica entrambe le regole e risolve il GNEP. ⁴

□

3 Classi di GNEP

Un'ipotesi piuttosto standard nella trattazione dei GNEP, e che quindi viene sottintesa, consiste nella differenziabilità, almeno al secondo ordine, di tutte le funzioni costituenti il problema di ottimizzazione dei giocatori. Inoltre, i GNEP che trattiamo in questo testo

⁴I metodi per determinare una soluzione di un GNEP verranno trattati più dettagliatamente nei prossimi capitoli.

sono GNEP convessi. Questo significa che sia le funzioni obiettivo che gli insiemi ammissibili di tutti i giocatori sono convessi **nelle variabili del giocatore**. Un esempio chiarisce meglio il concetto di convessità limitata alle proprie variabili:

Esempio 3.1 Il seguente problema del giocatore 1 è convesso nelle sue variabili:

$$\begin{aligned} \max_{x^1} \quad & x_1^1 e^{\cos(x_1^2)} - (x_2^1 - \log(x_2^2))^2 \\ & - (x_1^1)^4 \geq 1 \\ & x_2^1 + x_1^1 \leq 3 + (x_1^2)^2 \end{aligned}$$

infatti se lo riportiamo in forma standard otteniamo:

$$\begin{aligned} \min_{x^1} \quad & -x_1^1 e^{\cos(x_1^2)} + (x_2^1 - \log(x_2^2))^2 \\ & (x_1^1)^4 + 1 \leq 0 \\ & x_2^1 + x_1^1 - 3 - (x_1^2)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

verifichiamo la convessità della funzione obiettivo nelle variabili x^1 :

$$\begin{aligned} \nabla_{x^1} f_1(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1^1} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{\cos(x_1^2)} \\ 2(x_2^1 - \log(x_2^2)) \end{pmatrix} \\ \nabla_{x^1 x^1}^2 f_1(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^1 x_1^1} & \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_1^1 x_2^1} \\ \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_2^1 x_1^1} & \frac{\partial^2 f_1(x)}{\partial x_2^1 x_2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

essendo $\nabla_{x^1 x^1}^2 f_1(x)$ semidefinita positiva otteniamo la convessità nelle variabili x^1 ; verifichiamo la convessità del primo vincolo nelle variabili x^1 :

$$\begin{aligned} \nabla_{x^1} g_1^1(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1^1(x)}{\partial x_1^1} \\ \frac{\partial g_1^1(x)}{\partial x_2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(x_1^1)^3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \nabla_{x^1 x^1}^2 g_1^1(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_1^1(x)}{\partial x_1^1 x_1^1} & \frac{\partial^2 g_1^1(x)}{\partial x_1^1 x_2^1} \\ \frac{\partial^2 g_1^1(x)}{\partial x_2^1 x_1^1} & \frac{\partial^2 g_1^1(x)}{\partial x_2^1 x_2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12(x_1^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{aligned}$$

essendo $\nabla_{x^1 x^1}^2 g_1^1(x)$ semidefinita positiva (in quanto $12(x_1^1)^2 \geq 0 \quad \forall x_1^1$) otteniamo la convessità nelle variabili x^1 ;

verifichiamo la convessità del secondo vincolo nelle variabili x^1 :

$$\nabla_{x^1} g_2^1(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_2^1(x)}{\partial x_1^1} \\ \frac{\partial g_2^1(x)}{\partial x_2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla_{x^1 x^1}^2 g_2^1(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_2^1(x)}{\partial x_1^1 \partial x_1^1} & \frac{\partial^2 g_2^1(x)}{\partial x_1^1 \partial x_2^1} \\ \frac{\partial^2 g_2^1(x)}{\partial x_2^1 \partial x_1^1} & \frac{\partial^2 g_2^1(x)}{\partial x_2^1 \partial x_2^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \succeq 0$$

essendo $\nabla_{x^1 x^1}^2 g_2^1(x)$ semidefinita positiva otteniamo la convessità nelle variabili x^1 .

Notate che sia la funzione obiettivo che il secondo vincolo non sono convessi per tutte le variabili x . \square

I GNEP possono essere specializzati in modo da ottenere problemi sempre più semplici da risolvere. Partendo dal caso più generale e arrivando al caso più particolare otteniamo le seguenti tipologie di GNEP:

generalizzato: sono presenti almeno 2 giocatori, e almeno un giocatore ha l'insieme ammissibile che dipende da variabili di altri giocatori;

jointly convex: sono presenti almeno 2 giocatori, e tutti i giocatori hanno lo stesso insieme ammissibile (convesso) che dipende dalle variabili di tutti;

standard (o NEP): sono presenti almeno 2 giocatori, almeno un giocatore ha la funzione obiettivo che dipende da variabili di altri giocatori, e tutti i giocatori hanno solo vincoli che dipendono esclusivamente dalle proprie variabili;

problemi di ottimizzazione: è presente un solo giocatore; oppure sono presenti almeno 2 giocatori, e tutti i giocatori hanno funzione obiettivo e vincoli che dipendono esclusivamente dalle proprie variabili ⁵.

La figura 5 illustra bene la generalizzazione nelle classi di GNEP.

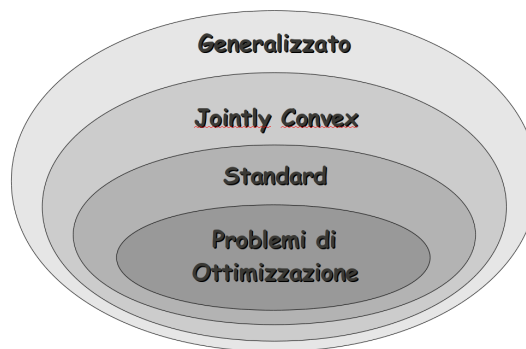


Figure 5: Classi di GNEP.

⁵In questo caso si hanno N problemi di ottimizzazione distinti, uno per ogni giocatore.

4 Metodi per la soluzione analitica di un GNEP

In questo capitolo ci occupiamo dei metodi per la determinazione analitica di una soluzione di un GNEP.

4.1 Soluzione grafica (2 giocatori - 1 variabile ciascuno)

Quando si deve risolvere un GNEP con soli 2 giocatori, in cui ognuno di essi ha un'unica variabile, si può sfruttare il metodo grafico. Partiamo con un esempio di GNEP standard:

$$P1 : \quad \min_{x_1^1} (x_1^1 + x_1^2 - 2)^2 \quad \quad \quad P2 : \quad \min_{x_1^2} (x_1^2 - 1)^2$$
$$0 \leq x_1^1 \leq 5 \quad \quad \quad 0 \leq x_1^2 \leq 3$$

Si considera un piano cartesiano in cui alle ascisse si pone la variabile del primo giocatore x_1^1 e alle ordinate la variabile del secondo giocatore x_1^2 . La prima cosa da fare è disegnare i due insiemi ammissibili (figura 6). Ovviamente l'insieme ammissibile del GNEP è l'intersezione degli insiemi ammissibili dei due giocatori.

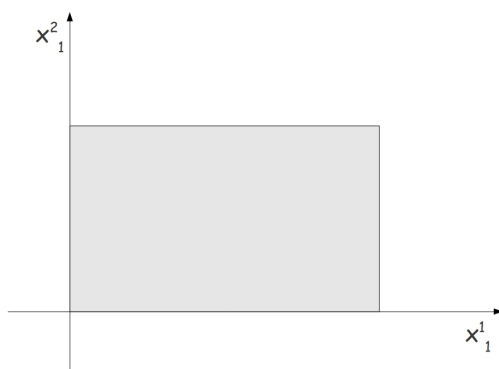


Figure 6: Insieme ammissibile del GNEP.

Il passo successivo consiste nel tracciare le **risposte ottime non vincolate** dei due giocatori. Per calcolare le risposte ottime non vincolate si hanno due casi:

- nel caso di funzione obiettivo lineare, la risposta ottima non vincolata del giocatore sarà $-\infty$, per ogni possibile valore della variabile dell'avversario, se il coefficiente della funzione obiettivo (da minimizzare) è positivo, oppure $+\infty$ se il coefficiente è negativo;
- nel caso di funzione obiettivo non lineare strettamente convessa nella variabile del giocatore⁶, basta trovare il luogo dei punti in cui la derivata della funzione obiettivo, rispetto alla variabile del giocatore, è uguale a zero.

⁶Altri casi non verranno trattati.

Nel caso che stiamo considerando le funzioni obiettivo non sono lineari e quindi per calcolare le risposte ottime non vincolate bisogna derivare le due funzioni obiettivo nella variabile del giocatore e porle uguali a zero. Quindi per il primo giocatore avremo risposta ottima non vincolata $x_1^1 + x_1^2 - 2 = 0$, mentre per il secondo giocatore la risposta ottima non vincolata è $x_1^2 - 1 = 0$ (figura 7).

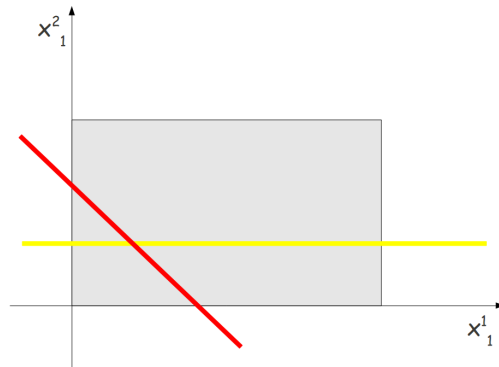


Figure 7: La risposta ottima non vincolata del primo giocatore è indicata in rosso, quella del secondo giocatore è in giallo.

In questo GNEP standard si individua un punto di equilibrio nel punto in cui le due risposte ottime non vincolate si incrociano, in quanto questa intersezione avviene dentro l'insieme ammissibile del GNEP. In particolare in questo problema non ci sono altri punti di equilibrio oltre $x^* = (1, 1)$ (figura 8).

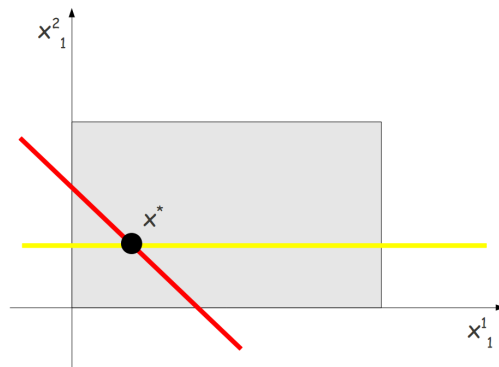


Figure 8: L'unica soluzione del GNEP è in $(1,1)$.

Modifichiamo il problema standard precedente cambiando la funzione obiettivo del secondo

giocatore:

$$P1 : \quad \min_{x^1} (x_1^1 + x_1^2 - 2)^2 \quad \quad \quad P2 : \quad \min_{x^2} \left(x_1^2 - \frac{5}{2} \right)^2$$

$$0 \leq x_1^1 \leq 5 \quad \quad \quad 0 \leq x_1^2 \leq 3$$

In questo nuovo problema è presente un punto di equilibrio in $(0, \frac{5}{2})$, in quanto il primo giocatore ha un ottimo vincolato, mentre il secondo giocatore ha un ottimo non vincolato (figura 9).

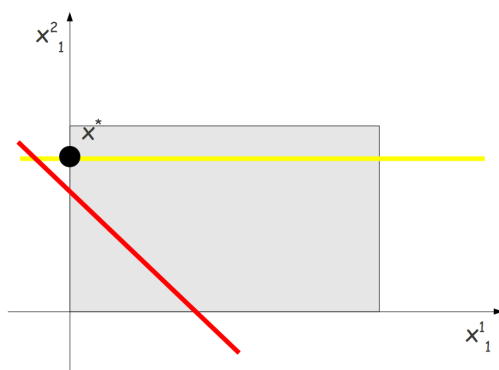


Figure 9: L'unica soluzione del GNEP è in $(0, \frac{5}{2})$.

Modifichiamo il problema standard precedente cambiando ancora una volta la funzione obiettivo del secondo giocatore:

$$P1 : \quad \min_{x^1} (x_1^1 + x_1^2 - 2)^2 \quad \quad \quad P2 : \quad \min_{x^2} \left(x_1^2 - \frac{7}{2} \right)^2$$

$$0 \leq x_1^1 \leq 5 \quad \quad \quad 0 \leq x_1^2 \leq 3$$

In questo nuovo problema è presente un punto di equilibrio in $(0, 3)$, in quanto sia il primo che il secondo giocatore hanno un ottimo vincolato (figura 10).

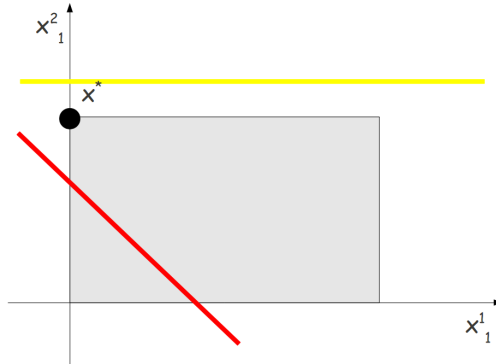


Figure 10: L'unica soluzione del GNEP è in $(0, 3)$.

Consideriamo ora un problema jointly convex⁷:

$$\begin{aligned}
 P1 : \quad & \min_{x^1} (x_1^1 - x_1^2)^2 \\
 & x_1^1 + x_1^2 \leq 5 \\
 & 0 \leq x_1^1 \leq 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P2 : \quad & \min_{x^2} (3x_1^1 + x_1^2 - 9)^2 \\
 & x_1^1 + x_1^2 \leq 5 \\
 & 0 \leq x_1^2 \leq 3
 \end{aligned}$$

In questo problema è presente un punto di equilibrio in $(\frac{9}{4}, \frac{9}{4})$ dove sia il primo che il secondo giocatore hanno un ottimo non vincolato, e un altro punto di equilibrio in $(2, 3)$ dove il primo giocatore ha un ottimo vincolato, mentre il secondo giocatore ha un ottimo non vincolato (figura 11).

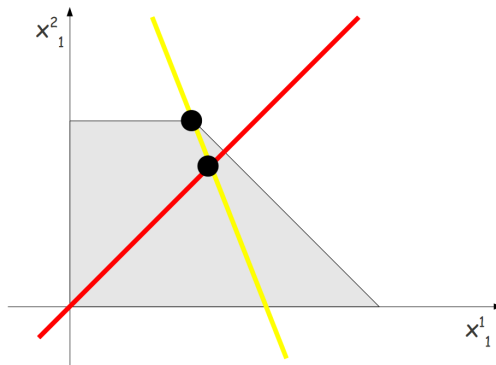


Figure 11: Le soluzioni del GNEP sono in $(\frac{9}{4}, \frac{9}{4})$ e in $(2, 3)$.

Spesso i punti di equilibrio non sono isolati, infatti se consideriamo il seguente problema

⁷I vincoli che dipendono esclusivamente dalle variabili dell'avversario non hanno significato per il giocatore e quindi vengono cancellati dalla definizione del problema.

jointly convex:

$$P1 : \quad \min_{x^1} (x_1^1 - x_1^2)^2$$

$$x_1^1 + x_1^2 \leq 5$$

$$0 \leq x_1^1 \leq 5$$

$$P2 : \quad \min_{x^2} (-x_1^1 + x_1^2 - 1)^2$$

$$x_1^1 + x_1^2 \leq 5$$

$$0 \leq x_1^2 \leq 3$$

i punti di equilibrio sono tutti i punti $(\alpha, 5 - \alpha)$ con $2 \leq \alpha \leq \frac{5}{2}$ (figura 12).

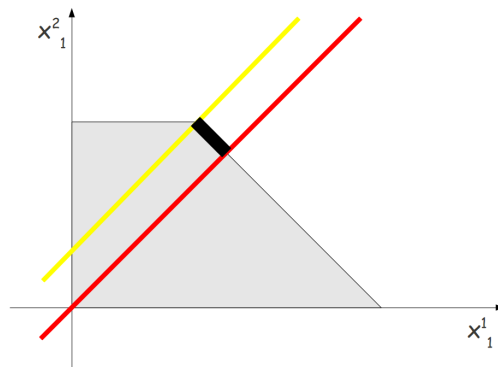


Figure 12: Il GNEP ha infiniti punti di equilibrio: $(\alpha, 5 - \alpha)$, $2 \leq \alpha \leq \frac{5}{2}$.

Il metodo grafico è applicabile anche a GNEP generalizzati, ma è necessario fare bene attenzione ai vincoli. Se infatti riprendiamo il problema dell'esempio 2.3:

$$P1 : \quad \min_{x^1} x_1^1$$

$$x_1^1 \geq 1$$

$$x_1^1 \geq 3 - x_1^2$$

$$P2 : \quad \min_{x^2} (x_1^2)^2$$

$$x_1^2 \geq x_1^1$$

possiamo rappresentare l'insieme ammissibile del GNEP evidenziando in modo separato i vincoli del primo giocatore da quelli del secondo (figura 13).



Figure 13: L'insieme ammissibile del GNEP. In rosso i vincoli del primo giocatore, in giallo quelli del secondo.

Ovviamente solo i propri vincoli possono generare ottimi vincolati per un giocatore. Se inseriamo le risposte ottime non vincolate risulta evidente che l'unico punto di equilibrio è $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ (figura 14).

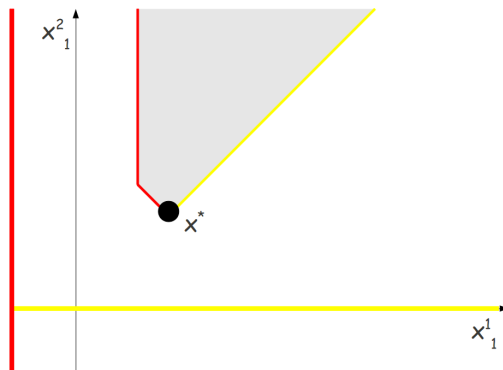


Figure 14: L'unico punto di equilibrio del GNEP è in $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

Si noti come il punto $(1,2)$ non può essere una soluzione del GNEP in quanto il vincolo $x_1^1 \geq 3 - x_1^2$ appartiene solo al primo giocatore e quindi non può generare un ottimo vincolato per il secondo giocatore.

Esercizio 4.1 Risolvere graficamente il seguente GNEP:

$$P1 : \quad \min_{x^1} x_1^1 x_1^2 \\ (x_1^1 - 1)^2 + (x_1^2 - 1)^2 \leq 1$$

$$P2 : \quad \min_{x^2} (x_1^1 + x_1^2 - 1)^2 \\ (x_1^1 - 1)^2 + (x_1^2 - 1)^2 \leq 1 \\ x_1^2 \geq 1$$

Esercizio 4.2 Risolvere graficamente il seguente GNEP:

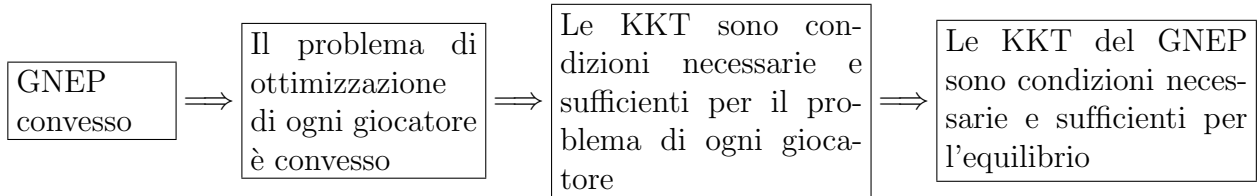
$$\begin{array}{ll}
 P1 : & \min_{x^1} (x_1^1 - (x_1^2)^2)^2 \\
 & (x_1^1 - 1)^2 + (x_1^2 + 1)^2 \leq 1 \\
 P2 : & \min_{x^2} (x_1^1 + x_1^2)^2 \\
 & (x_1^1 - 1)^2 + (x_1^2 + 1)^2 \leq 1
 \end{array}$$

Esercizio 4.3 Risolvere graficamente il seguente GNEP:

$$\begin{array}{ll}
 P1 : & \min_{x^1} -x_1^1 \\
 & (x_1^1)^2 + (x_1^2 + 1)^2 \leq 1 \\
 P2 : & \min_{x^2} (x_1^1 + x_1^2 - 1)^2 \\
 & (x_1^1 - 1)^2 + (x_1^2 + 1)^2 \leq 1
 \end{array}$$

4.2 Soluzione tramite KKT

Un metodo più generale per la determinazione di una soluzione analitica di un GNEP consiste nel risolvere il suo sistema di condizioni di KKT. Infatti, ipotizzando la validità di una condizione di qualificazione dei vincoli ⁸, seguendo i seguenti passi logici si ottiene l'equivalenza tra la soluzione di un GNEP convesso (come lo sono tutti quelli trattati in questo testo) e la soluzione del suo sistema di KKT, che è formato dall'unione dei sistemi di KKT di tutti i giocatori:



Formalmente il sistema delle condizioni di KKT del GNEP è:

$$\begin{aligned}
 & \nabla_{x^1} f_1(x) + \nabla_{x^1} h^1(x) \mu^1 + \nabla_{x^1} g^1(x) \lambda^1 = 0 \\
 & \quad \vdots \\
 & \nabla_{x^N} f_N(x) + \nabla_{x^N} h^N(x) \mu^N + \nabla_{x^N} g^N(x) \lambda^N = 0 \\
 & h^1(x) = 0 \\
 & \quad \vdots \\
 & h^N(x) = 0 \\
 & 0 \leq \lambda^1 \perp g^1(x) \leq 0 \\
 & \quad \vdots \\
 & 0 \leq \lambda^N \perp g^N(x) \leq 0,
 \end{aligned}$$

⁸Nozioni avanzate sulle condizioni di qualificazione dei vincoli di un GNEP vanno oltre gli scopi di questo corso. Basti sapere che tali condizioni implicano la validità delle condizioni di KKT.

dove $\mu^\nu \in \mathbb{R}^{p_\nu}$ e $\lambda^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$ per $\nu = 1, \dots, N$. Per risolvere questo sistema di equazioni e disequazioni, quando le sue dimensioni non sono eccessivamente elevate, si può usare lo stesso metodo combinatorio utilizzato nella programmazione non lineare.

Esempio 4.4 Riprendiamo uno dei NEP visti nella sezione precedente:

$$P1 : \quad \min_{x_1^1} (x_1^1 + x_1^2 - 2)^2 \quad \quad \quad P2 : \quad \min_{x_1^2} \left(x_1^2 - \frac{7}{2} \right)^2$$

$$0 \leq x_1^1 \leq 5 \quad \quad \quad 0 \leq x_1^2 \leq 3$$

il suo sistema di condizioni KKT è:

$$\begin{aligned} 2(x_1^1 + x_1^2 - 2) - \lambda_1^1 + \lambda_2^1 &= 0 \\ 2\left(x_1^2 - \frac{7}{2}\right) - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 &= 0 \\ \lambda_1^1(-x_1^1) &= 0 \\ \lambda_2^1(x_1^1 - 5) &= 0 \\ \lambda_1^2(-x_1^2) &= 0 \\ \lambda_2^2(x_1^2 - 3) &= 0 \\ \lambda_1^1 &\geq 0 \\ \lambda_2^1 &\geq 0 \\ \lambda_1^2 &\geq 0 \\ \lambda_2^2 &\geq 0 \\ -x_1^1 &\leq 0 \\ x_1^1 - 5 &\leq 0 \\ -x_1^2 &\leq 0 \\ x_1^2 - 3 &\leq 0 \end{aligned}$$

si verifica facilmente che l'unica soluzione di questo sistema è $(x_1^1, x_1^2, \lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_1^2, \lambda_2^2) = (0, 3, 2, 0, 0, 1)$. \square

Una caratteristica specifica dei problemi jointly convex è quella di avere alcuni punti di equilibrio particolari. Questi particolari punti di equilibrio sono chiamati **equilibri variazionali** e la loro caratteristica sta nel fatto che tali punti sono una soluzione del sistema di KKT del problema jointly convex quando i moltiplicatori associati ai vincoli condivisi sono presi uguali nei sottoproblemi di tutti i giocatori. Chiariamo questo concetto con un esempio.

Esempio 4.5 Riprendiamo uno dei problemi jointly convex visti nella sezione precedente:

$$\begin{array}{ll}
 P1 : & \min_{x^1} (x_1^1 - x_1^2)^2 \\
 & x_1^1 + x_1^2 \leq 5 \\
 & 0 \leq x_1^1 \leq 5 \\
 P2 : & \min_{x^2} (-x_1^1 + x_1^2 - 1)^2 \\
 & x_1^1 + x_1^2 \leq 5 \\
 & 0 \leq x_1^2 \leq 3
 \end{array}$$

il suo sistema di condizioni KKT è:

$$\begin{aligned}
 2(x_1^1 - x_1^2) + \lambda_1^1 - \lambda_2^1 + \lambda_3^1 &= 0 \\
 2(-x_1^1 + x_1^2 - 1) + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 0 \\
 \lambda_1^1(x_1^1 + x_1^2 - 5) &= 0 \\
 \lambda_2^1(-x_1^1) &= 0 \\
 \lambda_3^1(x_1^1 - 5) &= 0 \\
 \lambda_1^2(x_1^1 + x_1^2 - 5) &= 0 \\
 \lambda_2^2(-x_1^2) &= 0 \\
 \lambda_3^2(x_1^2 - 3) &= 0 \\
 \lambda_1^1 &\geq 0 \\
 \lambda_2^1 &\geq 0 \\
 \lambda_3^1 &\geq 0 \\
 \lambda_1^2 &\geq 0 \\
 \lambda_2^2 &\geq 0 \\
 \lambda_3^2 &\geq 0 \\
 x_1^1 + x_1^2 - 5 &\leq 0 \\
 -x_1^1 &\leq 0 \\
 x_1^1 - 5 &\leq 0 \\
 -x_1^2 &\leq 0 \\
 x_1^2 - 3 &\leq 0
 \end{aligned}$$

tutte le soluzioni di questo sistema di equazioni e disequazioni sono i punti di equilibrio del problema. Tra tutti questi punti di equilibrio ce ne sono alcuni variazionali, per trovarli bisogna risolvere il sistema di KKT quando i giocatori condividono lo stesso moltiplicatore associato al vincolo condiviso (ovvero $\lambda_1^1 = \rho$, $\lambda_1^2 = \rho$) e quindi il sistema di KKT diventa:

$$\begin{aligned}
 2(x_1^1 - x_1^2) + \rho - \lambda_2^1 + \lambda_3^1 &= 0 \\
 2(-x_1^1 + x_1^2 - 1) + \rho - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 &= 0 \\
 \rho(x_1^1 + x_1^2 - 5) &= 0 \\
 \lambda_2^1(-x_1^1) &= 0 \\
 \lambda_3^1(x_1^1 - 5) &= 0 \\
 \lambda_2^2(-x_1^2) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3^2(x_1^2 - 3) &= 0 \\
\rho &\geq 0 \\
\lambda_2^1 &\geq 0 \\
\lambda_3^1 &\geq 0 \\
\lambda_2^2 &\geq 0 \\
\lambda_3^2 &\geq 0 \\
x_1^1 + x_1^2 - 5 &\leq 0 \\
-x_1^1 &\leq 0 \\
x_1^1 - 5 &\leq 0 \\
-x_1^2 &\leq 0 \\
x_1^2 - 3 &\leq 0
\end{aligned}$$

l'unica soluzione di questo sistema, e quindi l'unico equilibrio variazionale del problema, è $(x_1^1, x_1^2, \rho, \lambda_2^1, \lambda_3^1, \lambda_2^2, \lambda_3^2) = (\frac{9}{4}, \frac{11}{4}, 1, 0, 0, 0, 0)$. \square

Esercizio 4.6 Trovare i punti di equilibrio di tutti i GNEP visti finora in questo testo risolvendone le condizioni di KKT.

5 Metodi per la soluzione numerica di un GNEP

In questo capitolo vengono introdotti i principali algoritmi per il calcolo di un punto di equilibrio di un GNEP. Essenzialmente tali algoritmi possono essere classificati in tre categorie:

1. quelli che puntano a risolvere il sistema di KKT del GNEP,
2. quelli che risolvono un'opportuna riformulazione del GNEP come problema di ottimizzazione,
3. quelli che risolvono un'opportuna riformulazione del GNEP come una disequazione quasi-variazionale.

Tra gli algoritmi che mirano a risolvere il sistema di KKT del GNEP bisogna sicuramente menzionare i metodi di tipo Newton applicati ad una riformulazione del sistema di KKT come sistema di equazioni non differenziabile (F.Facchinei, A.Fischer e V.Piccialli [4]), e che presentano buone proprietà di convergenza locale. Ottime proprietà di convergenza globale sono garantite dalla classe di metodi interni volti alla risoluzione delle KKT del GNEP intese come sistema di equazioni con vincoli di non negatività per alcune variabili (A.Dreves, F.Facchinei, C.Kanzow e S.Sagratella [2]). Infine tra gli algoritmi per la soluzione numerica delle KKT del GNEP va citato il metodo di linearizzazione usato dal solutore PATH [1], che sebbene non goda di buone proprietà teoriche, è la base del solutore che ad oggi risulta

essere, insieme ai metodi interni citati poco fa, tra i più efficienti ed efficaci per il calcolo di un equilibrio di Nash.

I metodi che risolvono un'opportuna riformulazione del GNEP come problema di ottimizzazione in generale non godono di buone proprietà di convergenza, tuttavia possono essere applicati efficacemente, ma spesso non efficientemente, per risolvere NEP e per trovare equilibri variazionali di un problema jointly convex. Tra questi metodi va citata la classe di riformulazioni che utilizzano la funzione Nikaido-Isoda proposte da C.Kanzow et al. [11], e la minimizzazione non vincolata della norma euclidea della riformulazione delle KKT come sistema di equazioni [2].

Infine la terza categoria di algoritmi riformula il GNEP come una disequazione quasi-variazionale (J.-S.Pang e M.Fukushima [13]). Per apprezzare questa riformulazione è tipico utilizzare poi algoritmi che risolvono specificatamente disequazioni quasi-variazionali, questi sono essenzialmente di due tipi: proiettivo (Y.Nesterov e L.Scramali [12]) o che utilizzano una funzione gap (M.Fukushima [9]). Tuttavia va sottolineato come questi metodi hanno una elevata valenza teorica, ma una scarsa applicazione pratica. In particolare i NEP, come anche il problema di trovare un equilibrio variazionale di un problema jointly convex [3], possono essere riformulati come disequazioni variazionali (P.T.Harker [10]) e, per questa sottoclasse di disequazioni, molti algoritmi sono stati largamente studiati (F.Facchinei e J.-S.Pang [7]).

Concludiamo questo capitolo approfondendo alcuni dei metodi numerici appena descritti. In particolare per la prima tipologia di algoritmi si analizzerà la riformulazione delle KKT come sistema di equazioni e il metodo interno, infine per la seconda tipologia di algoritmi si introdurrà la funzione Nikaido-Isoda.

5.1 Riformulazione delle KKT come sistema di equazioni

La riformulazione del GNEP come sistema di equazioni consiste nella trasformazione del sistema di condizioni di KKT del GNEP in un sistema di equazioni non lineari. Quindi è necessario modificare le condizioni di complementarità presenti nelle KKT, per questo scopo si possono utilizzare le funzioni di complementarità.

Definizione 5.1 *Una funzione $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di complementarità se vale la condizione:*

$$\phi(a, b) = 0 \iff a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$$

□

Utilizzando una generica funzione di complementarità ϕ le KKT del GNEP diventano un sistema di equazioni non lineare:

$$\begin{pmatrix} \nabla_{x^1} f_1(x) + \nabla_{x^1} h^1(x)\mu^1 + \nabla_{x^1} g^1(x)\lambda^1 \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} f_N(x) + \nabla_{x^N} h^N(x)\mu^N + \nabla_{x^N} g^N(x)\lambda^N \\ h^1(x) \\ \vdots \\ h^N(x) \\ \phi(\lambda^1, -g^1(x)) \\ \vdots \\ \phi(\lambda^N, -g^N(x)) \end{pmatrix} = 0$$

Sono note molte funzioni di complementarità, le più utilizzate sono la funzione minimo:

$$\phi_{\min}(a, b) = \min(a, b),$$

e la funzione Fischer-Burmeister:

$$\phi_{FB}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} - a - b.$$

Il sistema di equazioni risultante dall'utilizzo di tali funzioni di complementarità risulta essere non lineare e, in generale, non differenziabile ⁹. Per risolvere tale sistema di equazioni sono stati applicati vari metodi di tipo Newton con buoni risultati di convergenza locale [4].

⁹Nozioni sulla trattazione di equazioni non differenziabili vanno oltre gli scopi di questo corso. Basti sapere che sistemi di equazioni non differenziabili non hanno matrice Jacobiana definita ovunque, ma è comunque possibile applicare metodi di tipo Newton per la loro risoluzione.

5.2 Un metodo interno per il sistema KKT del GNEP

Introducendo delle variabili di slack, si riformula il sistema di condizioni di KKT del GNEP come un sistema di equazioni con vincoli di non negatività per alcune variabili:

$$H(x, \mu, \lambda, w) = \begin{pmatrix} \nabla_{x^1} f_1(x) + \nabla_{x^1} h^1(x)\mu^1 + \nabla_{x^1} g^1(x)\lambda^1 \\ \vdots \\ \nabla_{x^N} f_N(x) + \nabla_{x^N} h^N(x)\mu^N + \nabla_{x^N} g^N(x)\lambda^N \\ h^1(x) \\ \vdots \\ h^N(x) \\ g^1(x) + w^1 \\ \vdots \\ g^N(x) + w^N \\ \lambda^1 \circ w^1 \\ \vdots \\ \lambda^N \circ w^N \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^N \\ w^1 \\ \vdots \\ w^N \end{pmatrix} \geq 0,$$

dove $\mu^\nu \in \mathbb{R}^{p_\nu}$, $\lambda^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$, $w^\nu \in \mathbb{R}^{m_\nu}$ per $\nu = 1, \dots, N$, e l'operatore \circ indica il prodotto componente per componente di due vettori.

L'algoritmo parte da un punto $((x)^0, (\mu)^0, (\lambda)^0, (w)^0)$ che verifica la non negatività di λ e w . Essenzialmente, ad ogni iterazione k l'algoritmo prevede la soluzione di un sistema di equazioni lineari per calcolare una direzione di ricerca di tipo Newton:

$$JH(x^{k-1}, \mu^{k-1}, \lambda^{k-1}, w^{k-1})d + H(x^{k-1}, \mu^{k-1}, \lambda^{k-1}, w^{k-1}) = b^k,$$

dove b^k è un opportuno vettore di parametri. Successivamente l'algoritmo calcola il passo α^k effettuando una prima ricerca di linea lungo d^k per garantire che il nuovo punto generato verifichi ancora la non negatività di λ e w , e poi riduce ancora il passo con una seconda ricerca di linea, sempre lungo d^k , per garantire una sufficiente riduzione di una particolare funzione potenziale, allo scopo di evitare di prendere punti $((x)^k, (\mu)^k, (\lambda)^k, (w)^k)$ le cui componenti λ e w sono troppo vicine a zero, prima di raggiungere la soluzione. Infine si

aggiorna il punto corrente:

$$\begin{pmatrix} (x)^k \\ (\mu)^k \\ (\lambda)^k \\ (w)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x)^{k-1} \\ (\mu)^{k-1} \\ (\lambda)^{k-1} \\ (w)^{k-1} \end{pmatrix} + \alpha^k d^k.$$

L'algoritmo appena descritto converge globalmente ad una soluzione del GNEP se la matrice $JH(x, \mu, \lambda, w)$ è non singolare per ogni punto (x, μ, λ, w) le cui componenti λ e w sono positive.

5.3 Riformulazione tramite funzione Nikaido-Isoda di un GNEP jointly convex come problema di ottimizzazione

Si considera un GNEP jointly convex il cui insieme ammissibile comune a tutti i giocatori viene indicato con X . La funzione Nikaido-Isoda è definita come:

$$\Psi(x, y) := \sum_{\nu=1}^N [f_{\nu}(x^{\nu}, x^{-\nu}) - f_{\nu}(y^{\nu}, x^{-\nu})],$$

dove $x^{-\nu} = (x^{\mu})_{\mu=1, \dots, N, \mu \neq \nu}$. Un **equilibrio variazionale** del problema jointly convex può essere trovata calcolando un ottimo **globale** per il seguente problema di ottimizzazione:

$$\min_{x \in X} \max_{y \in X} \left[\Psi(x, y) - \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2 \right],$$

dove $\alpha > 0$ è un opportuno parametro.

6 Metodi per ricondurre un GNEP ad una sua sottoclasse più semplice

In questo capitolo ci occupiamo di alcuni metodi che consentono di trasformare un GNEP di una certa classe (ad esempio un GNEP generalizzato) in un altro GNEP più semplice (ad esempio un NEP), dove i punti di equilibrio del GNEP più semplice sono anche punti di equilibrio del GNEP originario. Questo tipo di trasformazioni sono utili perché consentono di trattare GNEP difficili con metodi noti per GNEP più semplici. Tuttavia a volte il problema trasformato, sebbene appartenga ad una sottoclasse semplice di GNEP, risulta non godere di requisiti necessari ad una sua agevole risoluzione (ad esempio il GNEP semplice potrebbe essere non differenziabile o non convesso).

Si approfondiscono ora due di questi metodi, uno è il metodo di penalità (F.Facchinei e C.Kanzow [6]) che consente di trasformare un GNEP generalizzato in un NEP, l'altro è un metodo di parametrizzazione che permette di riformulare un problema jointly convex con soli vincoli di uguaglianza condivisi come un NEP (F.Facchinei e S.Sagratella [8]).

6.1 Ricodurre un GNEP generalizzato ad un NEP con la penalità

Dato un GNEP generalizzato, nel sottoproblema di ogni giocatore $\nu \in \{1, \dots, N\}$ si distinguono i vincoli complicati (che dipendono anche dalle variabili degli altri giocatori) dai vincoli semplici (che dipendono esclusivamente dalle proprie variabili):

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu} f_\nu(x) \\ h^\nu(x) = 0 \\ g^\nu(x) \leq 0 \\ u^\nu(x^\nu) = 0 \\ t^\nu(x^\nu) \leq 0, \end{aligned}$$

qui i vincoli h e g sono i vincoli complicati, mentre u e t sono i vincoli semplici. È possibile trasformare il GNEP appena descritto in un NEP penalizzando i vincoli complicati e ottenendo così per ogni giocatore $\nu \in \{1, \dots, N\}$ il seguente problema:

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu} f_\nu(x) + \rho^\nu (\|h^\nu(x)\| + \|\max(0, g^\nu(x))\|) \\ u^\nu(x^\nu) = 0 \\ t^\nu(x^\nu) \leq 0, \end{aligned}$$

dove $\rho^\nu > 0$, $\nu = 1, \dots, N$, è un parametro che deve essere stimato seguendo determinate procedure numeriche e $\|\cdot\|$ è una norma opportuna. Il NEP risultante è in generale non differenziabile e nella maggior parte dei casi perde alcune proprietà di convessità possedute dal GNEP originario. L'applicazione pratica di tali metodi non porta ad un grande vantaggio, ma potrebbe rendersi necessaria in assenza di un solutore per problemi generalizzati.

6.2 Ricodurre un problema jointly convex con vincoli di uguaglianza condivisi ad un NEP

Dato un problema jointly convex con soli vincoli di uguaglianza condivisi:

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu} f_\nu(x) \\ \sum_{\mu=1}^N A^\mu x^\mu = b \\ C^\nu x^\nu = d^\nu \\ g^\nu(x^\nu) \leq 0, \end{aligned}$$

dove (A^1, \dots, A^N, b) definiscono i vincoli condivisi, mentre (C^ν, d^ν) e g^ν definiscono i vincoli privati, $\nu = 1, \dots, N$. È possibile parametrizzare opportunamente il problema precedente

per trasformarlo in un NEP la cui soluzione è un punto di equilibrio del problema originario. Per fare questo è necessario trovare preliminarmente un punto \bar{x} ammissibile per tutti i giocatori:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^N A^\mu \bar{x}^\mu &= b \\ C^1 \bar{x}^1 &= d^1 \\ g^1(\bar{x}^1) &\leq 0 \\ &\vdots \\ C^N \bar{x}^N &= d^N \\ g^N(\bar{x}^N) &\leq 0 \end{aligned}$$

Il problema parametrizzato è il NEP in cui ogni giocatore $\nu \in \{1, \dots, N\}$ deve risolvere il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min_{x^\nu} f_\nu(x) \\ A^\nu x^\nu &= A^\nu \bar{x}^\nu \\ C^\nu x^\nu &= d^\nu \\ g^\nu(x^\nu) &\leq 0. \end{aligned}$$

È facile verificare che ogni punto che soddisfa il sistema di KKT del NEP derivato è un punto di KKT del problema jointly convex originario e quindi è un punto di equilibrio. Inoltre il NEP derivato gode delle stesse proprietà di convessità e differenziabilità del problema originario e quindi questo tipo di trasformazione è estremamente utile sia a livello teorico che nelle applicazioni pratiche.

⁹Si ringraziano Andrea Bufalo Manno, Tiziana D'Alfonso e Mirko Biancone per aver gentilmente collaborato alla revisione di questo testo.

References

- [1] S.P. DIRKSE AND M.C. FERRIS, *The path solver: a nonmonotone stabilization scheme for mixed complementarity problems*, Optim. Meth. and Software, 5 (1995), pp. 123–156.
- [2] A. DREVES, F. FACCHINEI, C. KANZOW, AND S. SAGRATELLA, *On the solution of the KKT conditions of generalized Nash equilibrium problems*, SIAM J. Optim., 21 (2011), pp. 1082–1108.
- [3] F. FACCHINEI, A. FISCHER, AND V. PICCIALLI, *On generalized Nash games and variational inequalities*, Oper. Res. Lett., 35 (2007), pp. 159–164.
- [4] F. FACCHINEI, A. FISCHER, AND V. PICCIALLI, *Generalized Nash equilibrium problems and Newton methods*, Math. Program., 117 (2009), pp. 163–194.
- [5] F. FACCHINEI AND C. KANZOW, *Generalized Nash equilibrium problems*, 4OR, 5 (2007), pp. 173–210.
- [6] F. FACCHINEI AND C. KANZOW, *Penalty methods for the solution of generalized Nash equilibrium problems*, SIAM J. Optim., 20 (2010), pp. 2228–2253.
- [7] F. FACCHINEI AND J.-S. PANG, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Volume I and II*, Springer Series in Operations Research, Springer–Verlag, New York, 2003.
- [8] F. FACCHINEI AND S. SAGRATELLA, *On the computation of all solutions of jointly convex generalized Nash equilibrium problems*, Optim. Lett., 5 (2011), pp. 531–547.
- [9] M. FUKUSHIMA, *A class of gap functions for quasi-variational inequality problems*, J. of Ind. and Manag. Optim., 3 (2007), pp. 165–171.
- [10] P.T. HARKER, *A variational inequality approach for the determination of oligopolistic market equilibrium*, Math. Prog., 30 (1984), pp. 105–111.
- [11] A. VON HEUSINGER AND C. KANZOW, *Optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem using Nikaido-Isoda-type functions*, Comput. Optim. and App., 43 (2009), pp. 353–377.
- [12] Y. NESTEROV AND L. SCRIMALI, *Solving strongly monotone variational and quasi-variational inequalities*, Core discussion paper, 2006/107.
- [13] J.-S. PANG AND M. FUKUSHIMA, *Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games*, Comput. Manag. Sci., 2 (2005), pp. 21–56 (erratum: *ibid.* 6 (2009), pp. 373–375).