Corso di Ottimizzazione

MODELLI MATEMATICI PER IL PROBLEMA DELLO YIELD MANAGEMENT FERROVIARIO

G. Di Pillo, S. Lucidi, L. Palagi

in collaborazione con
Datamat-Ingegneria dei Sistemi s.p.a.

YIELD MANAGEMENT

Sistema di gestione delle risorse di una azienda che ha come scopo principale la massimizzazione del profitto globale.

- varietà di servizi e di prezzi
- domanda variabile nel tempo
- vendita del servizio con incertezza sulla domanda futura

Quindi si adatta a

- compagnie di trasporto
  aereo, ferroviario, marittimo
- catene alberghiere
- Noleggio auto

YIELD MANAGEMENT

Utilizzato per la prima volta nel settore aereo

- American Airlines (Deregulation 1978)

Pochi esempi di utilizzo nel settore ferroviario:

- SNCF (Francia)

Modelli proposti finora sono lineari.

Questo è il primo tentativo di utilizzare un modello non lineare.

YIELD MANAGEMENT

Seat allocation

Tipico del caso aereo. Lo stesso posto può essere venduto a tariffe diverse a seconda di quando è acquistato.

Intermediate leg management

Gestire in modo ottimo la disponibilità di posti tra due fermate successive. Si tratta cioè di rifiutare una prenotazione quando c'è una ragionevole certezza che quel posto possa essere venduto successivamente producendo un maggior guadagno.

CASO FERROVIARIO

Supponendo definiti:

il sequenziamento dei treni,
e la struttura delle tariffe,

determinare quanti posti vendere su ciascuna O-D coperta da un treno, effettuando la gestione delle prenotazioni in modo da massimizzare il profitto.

MULTI-LEG. ogni itinerario è composto da più tratte (una tratta è il percoso tra due stazioni successive)

SINGLE-FARE. Fisicamente la prima e la seconda classe sono distinte, quindi possono essere trattati come treni indipendenti.

<u>OUTLINE</u>

Part 1: Mathematical models

- Description of the problem
- Linear model
- Nonlinear model
- Validation of the models

\- Numerical results with standard software

<u>LO SCOPO:</u>

- mostrare che il modello non lineare è competitivo rispetto al modello lineare.

- definire nuovi algoritmi di ottimizzazione non lineare che consentano di risolvere efficentemente il problema.

Introduction to the problem

Given a train with

- a route of m legs
- a capacity c_i for each leg $i = 1, \ldots, m$
- n Origin-Destination (O-D) pairs

Find

the booking limit for each O-D pair

such that

the overall revenue is maximized.

La costruzione di un modello matematico richiede:

- Scelta delle variabili
- Definizione dei vincoli
- Definizione obiettivo

Le variabili:

x_{ij} max numero di posti vendibili sulla

$O_i D_j$ i origine e j destinazione;

I vincoli:

disponibilità di posti
vincoli di tipo operativo,
vincoli di interezza;

La funzione obiettivo $f(x)$:

Guadagno atteso.

The constraints

- availability constraints due to the limited leg capacity;

  linear constraints

  $$\sum_{(ij)\in I_k} x_{ij} \leq c_k \qquad k = 1, \ldots, m$$

  where I_k is the set of O-D pairs that engage the k-th leg.

- non negativity constraints $x_{ij} \geq 0$
- lower bound constraints
  $x_{ij} \geq l_{ij}$,

\- "social" aspects:
l_{ij} is a minimum amount of seats reserved for the $O_i D_j$;

\- "dynamical" aspect:
l_{ij} are the seats already sold on the $O_i D_j$.

- upper bound constraints
  $x_{ij} \leq u_{ij}$

\- "operative" constraints (vincoli di sfrido)

- integrality constraints $x_{ij} \in Z$.

The objective function

For each pair Origin-Destination (O-D) (ij), let

- t_{ij} be the service fare;

given the

- booking limit x_{ij} and
- the value of the actual demand d_{ij},

the revenue R_{ij} for the O-D (ij) is expressed by

$$R_{ij} = \begin{cases} t_{ij} d_{ij} & \text{if} \;\; d_{ij} < x_{ij} \\ \\ t_{ij} x_{ij} & \text{if} \;\; d_{ij} \geq x_{ij} \end{cases}$$

The overall revenue is then given by

$$\sum_{(ij)} R_{(ij)}$$

Actually, d_{ij} is not known and we must resort to a probabilistic model for the service demand.

Booking demand representation

We assume that the demand is a continuous random variable and for each pair Origin-Destination (O-D) (ij) we know

- mean value μ_{ij}
- standard deviation σ_{ij},

We propose two models:

- **stochastic model** that better approximates a demand with signficance variance

- **deterministic model** that better approximates a demand with small variance

so as to exploit the differences in the expected revenue by using one model rather than the other.

A deterministic model

The demand is expressed only in terms of a mean value and the probability density p_{ij} for the demand d_{ij} on the O-D ij is given

$$p(d_{ij}) = \delta(d_{ij} - \mu_{ij})$$

In other words we assume that the demand

is known without uncertainty

that is μ_{ij} passengers will ask for the O-D pair (ij) with probability one.

The linear problem

If we assume a deterministic representation of the demand, the overall revenue is a linear function. Hence we obtain a Linear Programming problem (PL)

$$\max \sum_{(ij)} t_{ij} x_{ij}$$

subject to the constraints:

$$Ax \leq c$$

$$l \leq x \leq u$$

$$x_{ij} \quad \text{integer}$$

We must insert also

- the booking limit does not exceed the demand

$$x_{ij} \leq \mu_{ij}$$

Actually, the matrix A is totally unimodular and the integrality constraint can be eliminated.

A stochastic model

By a stochastic representation the forecast service demand is expressed in terms of means value and standard deviation of a distribution function.
For the demand d on the O-D (ij), we resort to a normal distribution $p_{ij}(d)$, truncated for values $d \leq l_{ij}$, where l_{ij} are the seats already sold.

The nonlinear problem (NLP)

We take as objective function the expected revenue

$$\max \sum_{(ij)} t_{ij} \left(\int_{-\infty}^{x_{ij}} y p_{ij}(y) dy + x_{ij} \int_{x_{ij}}^{\infty} p_{ij}(y) dy \right)$$

subject to the constraints:

$$Ax \leq c$$
$$l \leq x \leq u$$
$$x_{ij} \quad \text{integer}$$

- convex optimization problem
- Linear constraints most of them box constraints
- as $\sigma_{ij} \to 0$, the objective function of the stochastic model approaches the deterministic one, that is

$$\textbf{NLP} \quad \Longrightarrow_{\sigma \to 0} \quad \textbf{LP}$$

Validation of the models

The aim of the first numerical experience is to show

the effectiveness of

optimization
versus
no optimization ,

the effectiveness of the

nonlinear model
versus
the linear one.

To compare the quality of the solutions obtained by the linear and nonlinear model, we simulate different realizations of the service demand based on μ_{ij} and σ_{ij}.

The demand is satisfied or not depending on the value of the booking limit settled by the optimization procedure.

We randomly generate the passengers' arrival and simulate the selling process

Test problems

- Three sets of representative sample problems with number of legs $m = 5, 10, 15$, that corresponds

- small dimension $n = 15$
- medium dimension $n = 55$
- large dimension $n = 120$.

Each set contains problems that differ at least by one critical aspect:

- demanding exceeding (or not) the train capacity
- existence or not of additional bounds on variables
- costant or variable train capacity

SIMULAZIONE

Possiamo tenere in conto la dinamicità del problema oppure no.

Se si ottimizza una sola volta all'inizio del periodo di apertura delle prenotazioni, la richiesta effettiva non influenza la soluzione finale.

- Generazione di un problema test
- OTTIMIZZAZIONE
- Generazione della "domanda"
- Simulazione di un processo di vendita
- Valutazione del profitto atteso

SIMULAZIONE

Se teniamo conto della dinamicità del problema, allora si ottimizza ripetutamente durante il periodo in cui sono accettate le prenotazioni.
La richiesta effettiva influenza la soluzione finale.

- Generazione di un problema test
- OTTIMIZZAZIONE
- Generazione della "domanda"
- Simulazione di un processo di vendita
- Modifica del modello in base alla richiesta effettiva
- Valutazione del profitto atteso

CONFRONTI

Per valutare la qualità dei due modelli, confrontiamo il valore del profitto atteso ottenuto utilizzando il valore del booking limit determinato rispettivamente dal modello lineare e da quello non lineare.

Per valuatre l'efficienza dei due modelli, confrontiamo il tempo di CPU medio richiesto per la soluzione.