Corso di Laurea Magistrale e Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale

Prova d'esame di Ottimizzazione (LM)

11 Febbraio 2010 (Mattina)

Cognome : **Nome:**

Domanda 1 (11 punti) Dato il problema di programmazione non lineare:

$$\begin{aligned}
&\min_{x \in \Re^n} f(x) \\
&\quad h_j(x) = 0,\ \ j = 1, ..., m \leq n \\
&\quad g_i(x) = 0,\ \ i = 1, ..., p
\end{aligned}$$

enunciare e dimostrare le condizione necessarie di ottimalitá di Fritz-John.

Domanda 2 (7 punti) Definizioni e condizioni di ottimalitá nella Programmazione Multiobiettivo.

Corso di Laurea Magistrale e Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale

Prova d'esame di:
□ Ottimizzazione (LM)
□ Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

11 Febbraio 2010 (Pomeriggio)

Cognome : **Nome:**

Domanda 1 (11 punti) Dato il problema di PNL:

$$\min_{x \in \Re^n} f(x)$$
$$h_j(x) = 0, \quad j = 1, ..., m \leq n$$

descrivere il metodo di soluzione basato su funzioni lagrangiane aumentate sequenziali, spiegandone le basi analitiche e motivandone i singoli passi.

Domanda 2 (7 punti) Definizioni e condizioni di ottimalitá nella Programmazione Multiobiettivo.

Corso di Laurea Magistrale e Laurea Specalistica in Ingegneria Gestionale

Prova d'esame di Ottimizzazione (LM)

11 Febbraio 2010 (Mattina) Compito A

Cognome : **Nome:**

Esercizio 1 (7 punti)
Dato il problema di PNL:

$$
\begin{aligned}
\min\ & x + y \\
& -x \leq 1 \\
& x \leq 11 \\
& -y \leq 0 \\
& y - \sin x \leq 0
\end{aligned} \tag{1}
$$

- **(1 punto)** dire se il problema ammette soluzione globale applicando il Teorema di Weierstrass o un suo corollario (motivare la risposta analiticamente);
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, se il problema é convesso;
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, quali condizioni necessarie conviene utilizzare;
- **(3 punti)** determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie utilizzate;
- **(1 punto)** verificare se uno dei punti trovati con le condizioni necessarie soddisfa le condizioni di ottimalità sufficienti del secondo ordine.

Esercizio 2 (7 punti)
Dato il problema multiobiettivo:

$$
\min \begin{cases} z_1 = 2x_1 + x_2 \\ z_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}
$$

$$
(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq \frac{1}{4}
$$

$$
x_1 + x_2 \leq 2
$$

utilizzando anche la rapprsentazione grafica:

- **(3 punti)** determinare un ottimo di Pareto con il metodo dei pesi;
- **(3 punti)** determinare un ottimo di Pareto con il metodo degli ϵ-vincoli;
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, se gli ottimi trovati sono deboli o forti.

Esercizio 3 (7 punti)
Dato il problema di controllo ottimo, con T fissato:

$$\begin{aligned}
&\min\ \frac{1}{2}(x_1(T))^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u_1(t)^2 + u_2(t)^2\right) dt \\
&\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
&\dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_1(t) \\
&\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) + \cos(u_2(t)) \\
&x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \\
&x_2(T) = x_3(T) = 0 \\
&0 \leq u_2(t) \leq \pi
\end{aligned}$$

- **(1 punto)** scrivere la funzione Hamiltoniana;
- **(2 punti)** scrivere le equazioni di costato;
- **(3 punti)** scrivere la condizione necessaria di ottimo data dal principio del massimo;
- **(1 punto)** scrivere l'ulteriore condizione necessaria che si otterrebbe se il tempo finale T fosse libero.

Corso di Laurea Magistrale e Laurea Specalistica in Ingegneria Gestionale

Prova d'esame di Ottimizzazione (LM)

11 Febbraio 2010 (Mattina) Compito B

Cognome : **Nome:**

Esercizio 1 (7 punti)
Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \max\ & x + y \\ & x \leq 0 \\ & \cos y - x \leq 0 \\ & -y \leq 0 \\ & y \leq 13 \end{aligned} \tag{2}$$

- **(1 punto)** dire se il problema ammette soluzione globale applicando il Teorema di Weierstrass o un suo corollario (motivare la risposta analiticamente);
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, se il problema é convesso;
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, quali condizioni necessarie conviene utilizzare;
- **(3 punti)** determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie utilizzate;
- **(1 punto)** verificare se uno dei punti trovati con le condizioni necessarie soddisfa le condizioni di ottimalità sufficienti del secondo ordine.

Esercizio 2 (7 punti)
Dato il problema multiobiettivo:

$$\min \begin{cases} z_1 = x_1 + 2x_2 \\ z_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

utilizzando anche la rapprsentazione grafica:

- **(3 punti)** determinare un ottimo di Pareto con il metodo dei pesi;
- **(3 punti)** determinare un ottimo di Pareto con il metodo degli ϵ-vincoli;
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, se gli ottimi trovati sono deboli o forti.

Esercizio 3 (7 punti)
Dato il problema di controllo ottimo, con T fissato:

$$\begin{aligned}
&\min\ \frac{1}{2}(x_3(T))^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u_1(t)^2 + u_2(t)^2\right) dt \\
&\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
&\dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_2(t) \\
&\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) + \cos(u_1(t)) \\
&x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0 \\
&x_1(T) = x_2(T) = 1 \\
&0 \le u_1(t) \le \pi
\end{aligned}$$

- **(1 punto)** scrivere la funzione Hamiltoniana;
- **(2 punti)** scrivere le equazioni di costato;
- **(3 punti)** scrivere la condizione necessaria di ottimo data dal principio del massimo;
- **(1 punto)** scrivere l'ulteriore condizione necessaria che si otterrebbe se il tempo finale T fosse libero.

Corso di Laurea Magistrale e Laurea Specalistica in Ingegneria Gestionale

Prova d'esame di:
□ Ottimizzazione (LM)
□ Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

11 Febbraio 2010 (Pomeriggio) Compito A

Cognome : **Nome:**

Esercizio 1 (9 punti)
Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \min\ & 2x + y \\ & -x^3 \leq y \\ & x^3 \geq y \\ & x \leq 1 \end{aligned}$$

- **(1 punto)** dire se il problema ammette soluzione globale applicando il Teorema di Weierstrass o un suo corollario (motivare la risposta analiticamente);
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, se il problema é convesso;
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, quali condizioni necessarie conviene utilizzare;
- **(3 punti)** determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie utilizzate;
- **(1 punto)** verificare se uno dei punti trovati con le condizioni necessarie soddisfa le condizioni di ottimalità sufficienti del secondo ordine;
- **(1 punto)** per il problema, scrivere una funzione di penalitá sequenziale interna;
- **(1 punto)** scegliere un punto iniziale x^0 per un algoritmo che utilizza la funzione di penalitá sequenziale interna.

Esercizio 2 (5 punti)
Dato il problema multiobiettivo:

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \; x_1 + x_2 \; \right\} \\ & \min \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \end{array} \right\} \\ & (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- **(2 punti)** determinare il vettore z^{id} nello spazio degli obiettivi;
- **(3 punti)** scrivere il problema continuamente differenziabile che consenta di determinare un ottimo di Pareto utilizzando un metodo senza preferenze con norma $p = 1$.

Esercizio 3 (7 punti)
Dato il problema di controllo ottimo:

$$
\begin{aligned}
&\min \ \frac{1}{2}\int_0^T \left(x_1(t)^2 + t^2(x_2(t)^2 + x_3(t)^2) + e^{-t}(u_1(t)^2 + u_2(t)^2)\right) dt \\
&\dot{x}_1(t) = \frac{1}{t+1}x_2(t) \\
&\dot{x}_2(t) = x_3(t) \\
&\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - tx_2(t) + (t+1)x_3(t) + u_1(t) + u_2(t) \\
&x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1
\end{aligned}
$$

- **(3 punti)** scrivere le condizioni di ottimalità del principio del massimo;
- **(2 punti)** scrivere l'equazione differenziale di Riccati;
- **(2 punti)** dire cosa succede se $T \to \infty$.

Corso di Laurea Magistrale e Laurea Specalistica in Ingegneria Gestionale

Prova d'esame di:
□ Ottimizzazione (LM)
□ Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

11 Febbraio 2010 (Pomeriggio) Compito B

Cognome : **Nome:**

Esercizio 1 (9 punti)
Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} &\max\ 2x + y \\ &y^3 \le x \\ &-y^3 \ge x \\ &-y \le 1 \end{aligned}$$

- **(1 punto)** dire se il problema ammette soluzione globale applicando il Teorema di Weierstrass o un suo corollario (motivare la risposta analiticamente);
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, se il problema é convesso;
- **(1 punto)** dire, motivando la risposta, quali condizioni necessarie conviene utilizzare;
- **(3 punti)** determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie utilizzate;
- **(1 punto)** verificare se uno dei punti trovati con le condizioni necessarie soddisfa le condizioni di ottimalità sufficienti del secondo ordine;
- **(1 punto)** per il problema, scrivere una funzione di penalitá sequenziale interna;
- **(1 punto)** scegliere un punto iniziale x^0 per un algoritmo che utilizza la funzione di penalitá sequenziale interna.

Esercizio 2 (5 punti)
Dato il problema multiobiettivo:

$$\begin{aligned} &\max\ \left\{\ x_1 + x_2\ \right\} \\ &\min\ \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 \\ (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \end{array} \right\} \\ &(x_1 - 2)^2 + x_2^2 \le 4 \\ &x_1 \le 2 \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- **(2 punti)** determinare il vettore z^{id} nello spazio degli obiettivi;
- **(3 punti)** scrivere il problema continuamente differenziabile che consenta di determinare un ottimo di Pareto utilizzando un metodo senza preferenze con norma $p = \infty$.

Esercizio 3 (7 punti)
Dato il problema di controllo ottimo:

$$\begin{aligned}
&\min \ \frac{1}{2}\int_0^T \big(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + t^2 x_3(t)^2 + e^{-t}(u_1(t)^2 + u_2(t)^2)\big)\, dt \\
&\dot{x}_1(t) = \frac{1}{t+1} x_2(t) \\
&\dot{x}_2(t) = x_3(t) \\
&\dot{x}_3(t) = -x_1(t) + (t+1)x_2(t) - t x_3(t) + u_1(t) + u_2(t) \\
&x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1
\end{aligned}$$

- **(3 punti)** scrivere le condizioni di ottimalità del principio del massimo;
- **(2 punti)** scrivere l'equazione differenziale di Riccati;
- **(2 punti)** dire cosa succede se $T \to \infty$.