

Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE (LM)

13 Febbraio 2009

Cognome :

Nome:

Domanda 1 (11 punti) Dato il problema di ottimizzazione dinamica:

$$\begin{aligned} \max \quad & J = \psi(x(T)) + \int_0^T l(x(t), u(t)) dt \\ & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(t) \in \mathcal{U}, \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

con $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, enunciare e dimostrare le condizioni di ottimalità del principio del massimo.

Domanda 2 (7 punti) Dato il problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

con $x \in \mathfrak{R}^n$, $f \in C^2$, $g_i \in C^2$, $i = 1, \dots, p$, e $h_j \in C^2$, $j = 1, \dots, m$, enunciare e dimostrare le condizioni sufficienti del secondo ordine.

Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE (LM)

13 Febbraio 2009 - compito (1)

Cognome :

Nome:

Esercizio 1 (7 punti)

Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \max \quad & \left(x_2^2 + \frac{1}{2}x_1 \right) \\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & 0.5x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 1 \end{aligned}$$

- **(3 punti)** scrivere le condizioni necessarie di KKT e determinare i punti che le soddisfano;
- **(2 punti)** considerato uno qualsiasi dei punti di KKT prima determinati, scrivere le condizioni sufficienti del secondo ordine di ottimo locale e verificare se sono soddisfatte;
- **(2 punti)** scrivere una funzione di penalit  sequenziale mista interna-esterna.

Esercizio 2 (7 punti)

Dato il problema multiobiettivo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \begin{cases} z_1 = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ z_2 = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \end{cases} \\ & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq \frac{1}{4} \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

utilizzando anche la rappresentazione grafica:

- **(3 punti)** determinare il vettore z^{id} nello spazio degli obiettivi;
- **(3 punti)** scrivere il problema continuamente differenziabile che si ottiene utilizzando, per determinare un ottimo di Pareto, un metodo senza preferenze con norma $p = 1$;
- **(1 punto)** dire se pu  esistere un ottimo di Pareto locale ma non globale.

Esercizio 3 (7 punti)

Dato il problema di controllo ottimo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} \int_0^T (x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= -x_1(t) - x_2(t) + \sin(u(t)) \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) \\ x_1(T) &= x_2(T) = 1 \\ -\frac{\pi}{2} &\leq u(t) \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- **(1 punto)** scrivere la funzione Hamiltoniana;
- **(2 punti)** scrivere le equazioni di costato;
- **(2 punti)** scrivere la condizione necessaria di ottimo data dal principio del massimo;
- **(2 punti)** dire in quale caso deve risultare $H(\lambda(T), x(T), u(T)) = 0$.

Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE (LM)

13 Febbraio 2009 - compito (2)

Cognome :

Nome:

Esercizio 1 (7 punti)

Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \max \quad & (x_2^2 + 2x_1) \\ & x_1 - x_2 = 1 \\ & 0.5x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 1 \end{aligned}$$

- **(3 punti)** scrivere le condizioni necessarie di KKT e determinare i punti che le soddisfano;
- **(2 punti)** considerato uno qualsiasi dei punti di KKT prima determinati, scrivere le condizioni sufficienti del secondo ordine di ottimo locale e verificare se sono soddisfatte;
- **(2 punti)** scrivere una funzione di penalità sequenziale mista interna-esterna.

Esercizio 2 (7 punti)

Dato il problema multiobiettivo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \begin{cases} z_1 = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \\ z_2 = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \end{cases} \\ & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq \frac{1}{4} \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \end{aligned}$$

utilizzando anche la rappresentazione grafica:

- **(3 punti)** determinare il vettore z^{id} nello spazio degli obiettivi;
- **(3 punti)** scrivere il problema continuamente differenziabile che si ottiene utilizzando, per determinare un ottimo di Pareto, un metodo senza preferenze con norma $p = 1$;
- **(1 punto)** dire se può esistere un ottimo di Pareto locale ma non globale.

Esercizio 3 (7 punti)

Dato il problema di controllo ottimo:

$$\min \frac{1}{2} \int_0^T (x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2) dt$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) + \cos(u(t))$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0)$$

$$x_1(T) = x_2(T) = 1$$

$$0 \leq u(t) \leq \pi$$

- **(1 punto)** scrivere la funzione Hamiltoniana;
- **(2 punti)** scrivere le equazioni di costato;
- **(2 punti)** scrivere la condizione necessaria di ottimo data dal principio del massimo;
- **(2 punti)** dire in quale caso deve risultare $H(\lambda(T), x(T), u(T)) = 0$.