

# Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE (LM)

14 Gennaio 2009

Cognome :

Nome:

**Domanda 1 (11 punti)** Dato il problema di programmazione nonlineare

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathfrak{R}^n} \quad & f(x) \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \leq n \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

enunciare e dimostrare le condizioni sufficienti del secondo ordine.

**Domanda 2 (7 punti)** Dato il problema di ottimizzazione dinamica:

$$\begin{aligned} \max \quad & J = \psi(x(T)) + \int_0^T l(x(t), u(t)) dt \\ & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(t) \in \mathcal{U}, \quad \forall t \in [0, T] \end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ , enunciare e dimostrare le condizioni di ottimalità del principio del massimo.

# Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE (LM)

14 Gennaio 2009 - compito (1)

Cognome :

Nome:

## Esercizio 1 (9 punti)

Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \min \quad & y - x^2 \\ & 3x^2 + y^2 = 4 \\ & -x \leq y \leq x \end{aligned}$$

- (1 punto) dire se il problema è convesso;
- (3 punti) determinare i punti che soddisfano le condizioni di KKT;
- (2 punti) verificare se uno dei punti di KKT trovati soddisfa le condizioni sufficienti di ottimalità;
- (2 punti) dire, motivando la risposta, se uno dei punti di KKT trovati fornisce una soluzione globale del problema;
- (1 punto) determinare la funzione di penalità sequenziale esterna per il problema.

## Esercizio 2 (5 punti)

Dato il problema di ottimizzazione con più obiettivi:

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} \\ \max \quad & \left\{ x_3 \right\} \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \end{aligned}$$

- (3 punti) determinare il vettore ideale degli obiettivi e le soluzioni ammissibili che lo determinano;
- (2 punti) determinare una soluzione di Pareto utilizzando il metodo dei pesi, con pesi tutti diversi da zero.

**Esercizio 3 (7 punti)**

Dato il problema di controllo ottimo:

$$\min x_1(T)^2 + \int_0^T (x_2(t)^2 + x_3(t)^2 + u(t)^2) dt$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + u(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$$

$$x_2(T) = x_3(T) = 0$$

- **(3 punti)** scrivere le condizioni di ottimalità del principio del massimo;
- **(2 punti)** dire, motivando la risposta, se si può ottenere il controllo ottimo come controreazione dello stato;
- **(2 punti)** dire come cambiano le condizioni di ottimalità se il controllo deve soddisfare la condizione  $u(t) \geq 0$  con  $0 \leq t \leq T$ .

# Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE (LM)

14 Gennaio 2009 - compito (2)

Cognome :

Nome:

## Esercizio 1 (10 punti)

Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \max \quad & y - x^2 \\ & x^2 + 3y^2 = 4 \\ & -x \leq y \leq x \end{aligned}$$

- (1 punto) dire se il problema è convesso;
- (3 punti) determinare i punti che soddisfano le condizioni di KKT;
- (2 punti) verificare se uno dei punti di KKT trovati soddisfa le condizioni sufficienti di ottimalità;
- (2 punti) dire, motivando la risposta, se uno dei punti di KKT trovati fornisce una soluzione globale del problema;
- (2 punti) scrivere il  $k$ -esimo problema di programmazione quadratica che occorre risolvere in un algoritmo di programmazione quadratica ricorsiva, noto il punto corrente  $x^k = y^k = 1$  e i moltiplicatori correnti:  $\mu^k = \frac{1}{2}$ , per il vincolo di uguaglianza, e  $\lambda_1^k = \lambda_2^k = \frac{1}{3}$ , per il primo e il secondo vincolo di disuguaglianza.

## Esercizio 2 (5 punti)

Dato il problema di ottimizzazione con più obiettivi:

$$\begin{aligned} \max \quad & \left\{ x_1 \right\} \\ \min \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_2 \\ x_3 \end{array} \right\} \\ & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \end{aligned}$$

- (3 punti) determinare il vettore ideale degli obiettivi e le soluzioni ammissibili che lo determinano;
- (2 punti) determinare una soluzione di Pareto utilizzando il metodo degli  $\epsilon$ -vincoli.

**Esercizio 3 (6 punti)**

Dato il problema di controllo ottimo:

$$\min x_3(T)^2 + \int_0^T (x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2) dt$$

$$\dot{x}_1(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$$

$$x_1(T) = x_2(T) = 0$$

- **(3 punti)** scrivere le condizioni di ottimalità del principio del massimo;
- **(2 punti)** dire, motivando la risposta, se si può ottenere il controllo ottimo come controreazione dello stato;
- **(1 punto)** dire come cambiano le condizioni di ottimalità se il tempo finale  $T$  è libero.