

Prova d'esame di Ottimizzazione (LM)

25 Febbraio 2011

Cognome :

Nome:

Domanda 1 (11 punti) Sia $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione quadratica:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$$

con Q matrice simmetrica e definita positiva. Siano d^0, d^1, \dots, d^{n-1} direzioni non nulle e coniugate rispetto a Q . Dimostrare che il metodo delle direzioni coniugate determina il minimo della funzione $f(x)$ in $m \leq n$ iterazioni.

Domanda 2 (7 punti) Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

con $x \in \mathfrak{R}^n$, $f \in C^1$, $g_i \in C^1, i = 1, \dots, p$, $h_j \in C^1, j = 1, \dots, m$, descrivere il metodo di soluzione basato su funzioni di penalità esterna, enunciando e dimostrando le disequazioni preliminari e il teorema di convergenza.

Prova d'esame di Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

25 Febbraio 2011

Cognome :

Nome:

Domanda 1 (11 punti) Dato il problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \leq n \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^2$, $g_i \in C^2$, $h_j \in C^2$, enunciare e dimostrare le condizioni sufficienti del secondo ordine.

Domanda 2 (7 punti) Dato il problema lineare quadratico

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \leq n \end{aligned}$$

descrivere il metodo di soluzione basato su funzioni lagrangiane aumentate sequenziali, spiegandone le basi analitiche e motivandone i singoli passi.

Prova d'esame di:
 Ottimizzazione (LM)
 Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

25 Febbraio 2011 Compito A

Cognome :

Nome:

Esercizio 1 (7 punti)

Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 + y^2 + z^2 \\ & 2x + y + z = 1 \\ & x^2 \geq 1 \end{aligned}$$

- **(1 punto)** dire se il problema ha insieme ammissibile compatto (motivare la risposta analiticamente);
- **(2,5 punti)** determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie KKT;
- **(1 punto)** scegliere uno dei punti trovati con le condizioni necessarie e verificare se soddisfa le condizioni di ottimalità sufficienti del secondo ordine;
- **(0.5 punti)** dire se il problema ha ottimo globale e in tal caso indicare quale è;
- **(2 punti)** scrivere la funzione lagrangiana aumentata per il problema e le formule di aggiornamento dei moltiplicatori.

Esercizio 2 (8 punti)

Dato il problema multiobiettivo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{1}{2} [(x_1 - 2)^2 + x_2^2] \\ z_2 = \frac{1}{2} [x_1^2 + (x_2 - 2)^2] \end{array} \right\} \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

- **(3 punti)** determinare se il punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ soddisfa le condizioni necessarie per l'ottimalità di Pareto;
- **(2 punti)** determinare se lo stesso punto è un ottimo di Pareto;
- **(3 punti)** scrivere il problema continuamente differenziabile che si ottiene utilizzando un metodo senza preferenze con norma $p = 1$.

Esercizio 3 (6 punti)

Dato il problema di controllo ottimo, con T fissato:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (x_i(T))^2$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_2(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$$

$$x_3(T) = 0$$

- **(3 punti)** scrivere le condizioni necessarie di ottimalità per il problema considerato;
- **(2 punti)** dire come cambiano le condizioni di ottimalità se il controllo $u(t)$ deve soddisfare il vincolo $u_1(t)^2 + u_2(t)^2 = 1$ con $0 \leq t \leq T$;
- **(1 punto)** dire come va modificata la funzione obiettivo se T è libero e va minimizzato.

Prova d'esame di:
□ Ottimizzazione (LM)
□ Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

25 Febbraio 2011 Compito B

Cognome :

Nome:

Esercizio 1 (7 punti)

Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 + y^2 + z^2 \\ & 2x + y + z = 1 \\ & y^2 \geq 1 \end{aligned}$$

- **(1 punto)** dire se il problema ha insieme ammissibile compatto (motivare la risposta analiticamente);
- **(2,5 punti)** determinare i punti che soddisfano le condizioni necessarie KKT;
- **(1 punto)** scegliere uno dei punti trovati con le condizioni necessarie e verificare se soddisfa le condizioni di ottimalità sufficienti del secondo ordine;
- **(0.5 punti)** dire se il problema ha ottimo globale e in tal caso indicare quale è;
- **(2 punti)** scrivere la funzione lagrangiana aumentata per il problema e le formule di aggiornamento dei moltiplicatori.

Esercizio 2 (8 punti)

Dato il problema multiobiettivo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{1}{2} [(x_1 + 2)^2 + x_2^2] \\ z_2 = \frac{1}{2} [x_1^2 + (x_2 - 2)^2] \end{array} \right\} \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

- **(3 punti)** determinare se il punto $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ soddisfa le condizioni necessarie per l'ottimalità di Pareto;
- **(2 punti)** determinare se lo stesso punto è un ottimo di Pareto;
- **(3 punti)** scrivere il problema continuamente differenziabile che si ottiene utilizzando un metodo senza preferenze con norma $p = 1$.

Esercizio 3 (6 punti)

Dato il problema di controllo ottimo, con T fissato:

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=2}^3 (x_i(T))^2$$

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_1(t) + x_2(t) + u_2(t)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$$

$$x_1(T) = 0$$

- **(3 punti)** scrivere le condizioni necessarie di ottimalità per il problema considerato;
- **(2 punti)** dire come cambiano le condizioni di ottimalità se il controllo $u(t)$ deve soddisfare il vincolo $u_1(t)^2 + u_2(t)^2 = 1$ con $0 \leq t \leq T$;
- **(1 punto)** dire come va modificata la funzione obiettivo se T è libero e va minimizzato.