Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE nei SISTEMI COMPLESSI

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - **4° anno**

(Prof. G. Di Pillo) 11 Settembre 2007

Cognome : **Nome :**

Domanda 1 (11 punti) Dato il problema di Ottimizzazione

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\quad g_i(x) \le 0, \quad i = 1, \dots, p \\ &\quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

con $x \in \Re^n$ e le funzioni f, g_i, $i = 1, \dots, p$, e h_j, $j = 1, \dots, m$, continuamente differenziabili, enunciare e dimostrare le condizioni necessarie di Fritz-John.

Domanda 2 (7 punti) Per il problema della Domanda 1, descrivere il metodo di soluzione basato su funzioni di Penalità esterna, enunciando e dimostrando il teorema di convergenza.

Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE nei SISTEMI COMPLESSI - $\boxed{\text{A}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - 4^{o} anno

(Prof. G. Di Pillo) 11 Settembre 2007

Cognome : **Nome :**

Esercizio 1 (10 punti)
Dato il problema di PNL:

$$\begin{aligned} \min \quad & e^{x+\frac{1}{2}y^2} \\ & 0 \leq x + y \leq 1 \end{aligned} \tag{P}$$

- **(1 punto)** dire se sulla base del Teorema di Weierstrass si può affermare l'esistenza di una soluzione globale;
- **(2 punti)** dire se il problema può avere soluzioni locali non globali;
- **(1 punto)** dire se il problema può avere più di una soluzione globale;
- **(3 punti)** determinare i punti di KKT del problema;
- **(1 punto)** dire se i punti di KKT trovati sono soluzioni, locali o globali, del problema, motivando la risposta;
- **(2 punti)** scrivere il k-esimo problema di programmazione quadratica in un algoritmo di programmazione quadratica ricorsiva per la soluzione del problema dato.

Esercizio 2 (7 punti)
Dato il seguente problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} \min \quad & (x+y, x-y)^\top \\ & 1 - x^2 - y^2 \leq 0 \\ & -2 \leq y \leq 2, \quad x \geq 0, \end{aligned} \tag{MOP}$$

- **(2 punti)** determinare per via grafica il vettore ideale degli obiettivi;
- **(3 punti)** determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dai punti $(0,2)^\top$ e $(0,-2)^\top$ utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato;
- **(1 punto)** dire se il punto $(1/2, 0)^\top$ è un ottimo di Pareto (N.B. non usare KKT);
- **(1 punto)** dire se il vettore ideale degli obiettivi determinato al punto 2 cambia ponendo, in (MOP), max al posto di min, spiegandone il motivo.

Esercizio 3 (4 punti)
Dato il problema di controllo ottimo

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}\int_0^T \Big(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u_1^2(t) + u_2^2(t)\Big)\,dt \\ & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ & \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ & \dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + u_1 + u_2 \\ & x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{aligned} \tag{CO}$$

con T fissato.

- **(2 punti)** scrivere l'espressione della legge di controllo ottimo e dell'equazione di Riccati relativa;
- **(1 punto)** dire cosa cambia nell'equazione di Riccati se lo stato iniziale cambia da $x(0) = (1\ 1\ 1)^\top$ a $x(0) = (-1\ \ -1\ \ -1)^\top$;
- **(1 punto)** dire cosa cambia nell'equazione di Riccati se $T \to +\infty$.

Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE nei SISTEMI COMPLESSI - $\boxed{\text{B}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - **4° anno**

(Prof. G. Di Pillo) 11 Settembre 2007

Cognome : **Nome :**

Esercizio 1 (10 punti)
Dato il problema di PNL:

$$\begin{array}{ll} \min & e^{\frac{1}{2}x^2+y} \\ & 0 \le x+y \le 1 \end{array} \tag{P}$$

- **(1 punto)** dire se sulla base del Teorema di Weierstrass si può affermare l'esistenza di una soluzione globale;
- **(2 punti)** dire se il problema può avere soluzioni locali non globali;
- **(1 punto)** dire se il problema può avere più di una soluzione globale;
- **(3 punti)** determinare i punti di KKT del problema;
- **(1 punto)** dire se i punti di KKT trovati sono soluzioni, locali o globali, del problema, motivando la risposta;
- **(2 punti)** scrivere il k-esimo problema di programmazione quadratica in un algoritmo di programmazione quadratica ricorsiva per la soluzione del problema dato.

Esercizio 2 (7 punti)
Dato il seguente problema multiobiettivo

$$\begin{array}{ll} \max & (x+y, x-y)^\top \\ & 1-x^2-y^2 \le 0 \\ & -2 \le y \le 2, \quad x \le 0, \end{array} \tag{MOP}$$

- **(2 punti)** determinare per via grafica il vettore ideale degli obiettivi;
- **(3 punti)** determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dai punti $(0,2)^\top$ e $(0,-2)^\top$ utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato;
- **(1 punto)** dire se il punto $(-1/2, 0)^\top$ è un ottimo di Pareto (N.B. non usare KKT);
- **(1 punto)** dire se il vettore ideale degli obiettivi determinato al punto 2 cambia ponendo, in (MOP), max al posto di min, spiegandone il motivo.

Esercizio 3 (4 punti)
Dato il problema di controllo ottimo

$$\begin{array}{ll} \min & \displaystyle\frac{1}{2}\int_0^T \Big(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u_1^2(t) + u_2^2(t)\Big)\, dt \\ & \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ & \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ & \dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) + u_1 + u_2 \\ & x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{array} \tag{CO}$$

con T fissato.

- **(2 punti)** scrivere l'espressione della legge di controllo ottimo e dell'equazione di Riccati relativa;
- **(1 punto)** dire cosa cambia nell'equazione di Riccati se lo stato iniziale cambia da $x(0) = (1\ 1\ 1)^\top$ a $x(0) = (-1\ \ -1\ \ -1)^\top$;
- **(1 punto)** dire cosa cambia nell'equazione di Riccati se $T \to +\infty$.