

# Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE dei SISTEMI COMPLESSI

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 4° anno

(Prof. G. Di Pillo)

Cognome :

Nome :

---

**Domanda 1. (11 punti)** Dato il problema di ottimizzazione dinamica

$$\begin{aligned} \max \quad & J = \psi(x(T)) + \int_0^T l(x(t), u(t)) dt \\ & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(t) \in V \end{aligned}$$

con  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , enunciare e dimostrare le condizioni di ottimalità del Principio del Massimo.

**Domanda 2. (7 punti)** Dato il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

sia  $x^* = 0$  la soluzione,  $f^* = f(x^*) = 0$  il valore della funzione obiettivo all'ottimo. Si dimostri che,  $\forall \epsilon$  sufficientemente piccolo esiste un  $u_\epsilon$  tale che si ha:

$$F_\epsilon(x) = f(x) + \|x\|^2 + u_\epsilon \left\{ \sum_{j=1}^m [h_j(x)]^2 + \sum_{i \in I_a(x^*)} [g_i^+(x)]^2 \right\}, \quad \forall x : \|x\| = \epsilon$$

---

**Esercizio 1. (7 punti)** Dato il problema di PNL

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(x_1^2 + (x_2 - 2)^2) \\ & x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

(i) (1 punto) Dire se il problema è convesso.

- (ii) **(3 punti)** Scrivere le condizioni necessarie di KKT e determinare i punti che le soddisfano.
- (iii) **(2 punti)** Scelto un punto che soddisfa le condizioni necessarie, verificare se soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.
- (iv) **(1 punto)** Scrivere la funzione di penalità sequenziale esterna.

**Esercizio 2. (7 punti)** Dato il problema multiobiettivo

$$\min \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}[(x_1 - 1)^2 + x_2^2] \\ z_2 = \frac{1}{2}[x_1^2 + (x_2 - 1)^2] \\ x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{4} \\ x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- (i) **(3.5 punti)** Determinare se il punto  $x_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$  soddisfa le condizioni necessarie per l'ottimalità di Pareto.
- (ii) **(3.5 punti)** Determinare se lo stesso punto è un ottimo di Pareto.

**Esercizio 3. (7 punti)** Per il problema di controllo ottimo

$$\begin{aligned} \min J &= \int_0^\infty u^2(t) dt \\ \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t), \quad x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \quad x_2(0) = 1 \end{aligned}$$

- (i) **(3 punti)** Scrivere l'equazione differenziale matriciale di Riccati.
- (i) **(2 punti)** Scrivere l'espressione della legge di controllo ottimo in funzione dello stato, assumendo risolta l'equazione di Riccati.
- (iii) **(2 punti)** Scrivere l'equazione differenziale omogenea dell'evoluzione ottima dello stato (assumendo risolta l'equazione di Riccati).