Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE dei SISTEMI COMPLESSI - $\boxed{\text{A}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - **4° anno**

(Prof. G. Di Pillo) 23 Luglio 2007

Cognome : **Nome :**

Domanda 1 (11 punti) Dato il problema:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
& g_i(x) \leq 0, \qquad i = 1, \dots, p \\
& h_j(x) = 0, \qquad j = 1, \dots, m < n
\end{aligned}
$$

con $x \in \Re^n$, $f \in C^2$, $g_i \in C^2$, $h_j \in C^2$, enunciare e dimostrare le condizioni sufficienti del secondo ordine.

Domanda 2 (7 punti) Dato il problema di ottimizzazione dinamica

$$
\begin{aligned}
\max \quad & J = \psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt \\
& \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\
& x(0) = x_0 \\
& u(t) \in V
\end{aligned}
$$

con $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^m$, enunciare e dimostrare le condizioni di ottimalità del Principio del Massimo.

Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE dei SISTEMI COMPLESSI - $\boxed{\text{A}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - **4° anno**

(Prof. G. Di Pillo) 23 Luglio 2007

Cognome : **Nome :**

Esercizio 1 (9 punti)
Dato il problema di PNL:

$$
\begin{aligned}
\min\ & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\
& x + y \le 0 \\
& y + z \le 0 \\
& x + z \le 0
\end{aligned}
\qquad \text{(P)}
$$

- **(2 punti)** dire se si può affermare l'esistenza di una soluzione globale;
- **(1 punto)** dire se è necessario effettuare una analisi di regolarità dei vincoli;
- **(3 punto)** determinare i punti di KKT;
- **(1 punto)** verificare se i punti di KKT trovati soddisfano le condizioni sufficienti del II ordine;
- **(1 punto)** scrivere una funzione di penalità interna per il problema (P);
- **(1 punto)** dire se il punto $x = y = 0,\ z = 1$ può essere preso come punto iniziale in un algoritmo risolutivo basato su una funzione di penalità interna.

Esercizio 2 (7 punti)
Sia dato il seguente problema multiobiettivo

$$
\begin{aligned}
\min\ & (y, -x)^\top \\
& (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 2 \\
& (x+1)^2 + (y-1)^2 \le 2
\end{aligned}
\qquad \text{(MOP)}
$$

- **(1 punto)** Dire se il problema (MOP) è convesso motivando la risposta.
- **(3 punti)** Determinare per via grafica il vettore ideale degli obiettivi.
- **(3 punti)** Determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dai punti $(0,0)^\top$ e $(\sqrt{2}-1,\ 1)^\top$ utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.

Esercizio 3 (5 punti)
Dato il problema di controllo ottimo

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}\int_0^T \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u_1(t)^2 + u_2(t)^2 \right) dt \\
& \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\
& \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\
& \dot{x}_3(t) = -x_1(t)^2 - x_2(t)^2 - x_3(t)^2 + u_1 + u_2 \\
& x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0 \\
& x_1(T) = x_2(T) = 1 \\
& 0 \le u_1(t) \le 1
\end{aligned}
\qquad \text{(CO)}
$$

con T fissato.

- **(3 punti)** scrivere le condizioni necessarie del principio del massimo;
- **(2 punti)** scrivere la condizione aggiuntiva per il caso T libero.

Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE dei SISTEMI COMPLESSI - $\boxed{\text{B}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - **4$^{\text{o}}$ anno**

(Prof. G. Di Pillo) 23 Luglio 2007

Cognome : **Nome :**

Domanda 1 (11 punti) Dato il problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \qquad i = 1, \ldots, p \\ & h_j(x) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m < n \end{aligned}$$

con $x \in \Re^n$, $f \in C^1$, $g_i \in C^1$, $h_j \in C^1$, descrivere il metodo di soluzione basato su funzioni di penalità esterna, enunciando e dimostrando il teorema di convergenza.

Domanda 2 (7 punti) Dato il problema di ottimizzazione dinamica

$$\begin{aligned} \max \quad & J = \psi(x(T)) + \int_0^T \ell(x(t), u(t))dt \\ & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ & x(0) = x_0 \\ & u(t) \in V \end{aligned}$$

con $x(t) \in \Re^n$, $u(t) \in \Re^m$, enunciare e dimostrare le condizioni di ottimalità del Principio del Massimo.

Prova d'esame di OTTIMIZZAZIONE dei SISTEMI COMPLESSI - $\boxed{\text{B}}$

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale - **4º anno**

(Prof. G. Di Pillo) 23 Luglio 2007

Cognome : **Nome :**

Esercizio 1 (9 punti)
Dato il problema di PNL:

$$
\begin{aligned}
\min\ & (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 \\
& x + y \geq 0 \\
& y + z \geq 0 \\
& x + z \geq 0
\end{aligned}
\tag{P}
$$

- **(2 punti)** dire se si può affermare l'esistenza di una soluzione globale;
- **(1 punto)** dire se è necessario effettuare una analisi di regolarità dei vincoli;
- **(3 punto)** determinare i punti di KKT;
- **(1 punto)** verificare se i punti di KKT trovati soddisfano le condizioni sufficienti del II ordine;
- **(1 punto)** scrivere una funzione di penalità esterna per il problema (P);
- **(1 punto)** dire se il punto $x = y = 0,\ z = 1$ può essere preso come punto iniziale in un algoritmo risolutivo basato su una funzione di penalità esterna.

Esercizio 2 (7 punti)
Sia dato il seguente problema multiobiettivo

$$
\begin{aligned}
\min\ & (x, -y)^\top \\
& (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2 \\
& (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 2
\end{aligned}
\tag{MOP}
$$

- **(1 punto)** Dire se il problema (MOP) è convesso motivando la risposta.
- **(3 punti)** Determinare per via grafica il vettore ideale degli obiettivi.
- **(3 punti)** Determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dai punti $(0,0)^\top$ e $(1-\sqrt{2},\ -1)^\top$ utilizzando il metodo degli ϵ-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.

Esercizio 3 (5 punti)
Dato il problema di controllo ottimo

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{2}\int_0^T \left(x_2(t)^2 + x_3(t)^2 + u_1(t)^2 + u_2(t)^2\right) dt \\
& \dot{x}_1(t) = -x_1(t)^2 - x_2(t)^2 - x_3(t)^2 + u_1 + u_2 \\
& \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\
& \dot{x}_3(t) = x_1(t) \\
& x_2(T) = x_3(T) = 1 \\
& 0 \leq u_2(t) \leq 1
\end{aligned}
\tag{CO}
$$

con T fissato.

- **(3 punti)** scrivere le condizioni necessarie del principio del massimo;
- **(2 punti)** scrivere la condizione aggiuntiva per il caso T libero.