

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_3 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 + 3x_2 + x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è coerciva.

 VERO FALSO

2. La funzione è convessa.

 VERO FALSO3. Il punto $x^* = (-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -1)^T$ è l'unico minimo globale. VERO FALSO4. La direzione $d = (-1, 0, -1)^T$ è di discesa in $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$ VERO FALSO5. Nel punto $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$, il passo $\alpha = \frac{1}{6}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente con il parametro $\gamma = \frac{1}{6}$. VERO FALSO**Esercizio 2** (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 2)^2 \\ & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4 \\ & x_1 \geq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema ammette soluzione globale (rispondere utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass)
2. Il problema non è convesso.
3. Il punto $\bar{x} = (1, 2)^T$ soddisfa le condizioni necessarie di KKT.
4. Il punto $\bar{x} = (1, 2)^T$ soddisfa la condizione di stretta complementarità.
5. Se il secondo membro del primo vincolo passa da 4 a $4 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$, la funzione obiettivo all'ottimo migliora.

Esercizio 3. (Punteggio massimo = 5) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 12x_1 + 24x_2 + 15x_3 \\ & -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -2 \\ & -4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema e sia $\bar{x} = (\frac{1}{3} \ \frac{1}{6} \ 0)^T$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & -2u_1 - u_2 \\ & -3u_1 - 4u_2 \leq 12 \\ & -6u_1 + 4u_2 \leq 24 \\ & 3u_1 + 5u_2 \leq 15 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

- | | | |
|--|-----------------------------------|------------------------------------|
| | <input type="text" value="VERO"/> | <input type="text" value="FALSO"/> |
|--|-----------------------------------|------------------------------------|
2. Il punto $\bar{u} = (0, 3)^T$ è ammissibile per il duale e si ha $c^T x^* \geq -3$.
 3. Il punto $u^1 = (5, 5)^T$ è ammissibile per il problema duale e si ha $b^T u^* \geq -15$.
 4. Esiste una soluzione ottima u^* per il duale e il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale si trova nell'intervallo $[-3, 8]$.
 5. Il punto $x^* = (0 \ \frac{1}{3} \ 0)^T$ è ottimo per il primale ed esiste una soluzione ottima per il duale.

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Si supponga di avere la seguente dichiarazioni di variabili e parametri nel file .mod:

```
set S;
param T;
param p{S};
```

```

param q{S,1..T};
param c{1..T}
var x{S,1..T}>= 0;

```

1. Si supponga di avere la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in S} p_i \sum_{j=1}^T x_{ij} - \sum_{j=1}^T c_j \sum_{i \in S} x_{ij}$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```

minimize f{1..T}:sum{i in S}p[i]*sum{j in 1..T}x[i,j]-sum{j in
1..T}c[j]*sum{i in S}x[i,j];

```

 VERO

 FALSO

2. La traduzione in AMPL del vincolo:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{T-1} x_{ij} \leq x_{1T}$$

è la seguente:

```

s.t. vinc{1..T-1}:sum{i in S}x[i,j]<=x[1,T];

```

 VERO

 FALSO

3. Si supponga che l'insieme S sia costituito dagli elementi $S1, S2, S3$, che il parametro T valga 2 e che il parametro q debba assumere i seguenti valori:

q	S1	S2	S3
1	1	2.5	1
2	2.5	1	3.5

La seguente assegnazione nel file .dat è corretta:

```

param q S1 S2 S3
      1 1 2.5 1
      2 2 2.5 3.5;

```

 VERO

 FALSO

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} f(x)$$

ed un punto \bar{x} tale che $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\nabla^2 f(\bar{x}) \prec 0$ il punto \bar{x} è un massimo locale

 VERO

 FALSO

2. In mancanza di ulteriori informazioni, non è possibile affermare che il punto \bar{x} NON è minimo locale

 VERO

 FALSO

3. Nel punto \bar{x} la direzione $d = -\nabla f(\bar{x})$ è di discesa.

VERO

FALSO

4. Se esiste, la direzione di Newton nel punto \bar{x} è $d = -[\nabla^2 f(\bar{x})]^{-1} \nabla f(\bar{x})$.

VERO

FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è strettamente convessa e le funzioni $g_j(x)$ sono lineari per ogni $j = 1, \dots, m$, allora il problema è strettamente convesso.

VERO

FALSO

2. Una soluzione globale è anche una soluzione locale.

VERO

FALSO

3. Se $f(x)$ è convessa e i vincoli g_j sono tutti convessi le condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker valgono anche in assenza di regolarità dei vincoli.

VERO

FALSO

4. Una funzione di penalità esterna per questo problema è

$$f(x) + \frac{1}{\epsilon} \|\max\{g(x), 0\}\|^2.$$

VERO

FALSO

Esercizio 7. (Punteggio massimo = 1) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il corrispondente problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T u \\ & A^T u = c \end{aligned}$$

dove $u \in \mathbb{R}^m$.

VERO

FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita, con valore della funzione obiettivo $c^T x^*$ allora si può verificare che il valore ottimo del problema duale soddisfi $b^T u^* \neq c^T x^*$.

VERO

FALSO

3. Se \bar{x} è un punto tale che $A\bar{x} \geq b$, allora $c^T \bar{x} < c^T x^*$.

VERO

FALSO

4. Se il problema duale è illimitato, allora il primale o ammette soluzione ottima finita oppure ha insieme ammissibile vuoto.

VERO

FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_3 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 + x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione non è coerciva.

 VERO FALSO

2. La funzione è strettamente convessa.

 VERO FALSO

3. Il punto
- $x^* = (\frac{1}{3}, 2, 2)^T$
- soddisfa la condizione necessaria del primo ordine.

 VERO FALSO

4. La direzione
- $d = (0, 0, -2)^T$
- è di discesa in
- $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$

 VERO FALSO

5. Nel punto
- $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$
- , il passo
- $\alpha = \frac{1}{3}$
- soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente con il parametro
- $\gamma = \frac{1}{4}$
- .

 VERO FALSO**Esercizio 2** (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2 \\ & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 4 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass non si può concludere nulla sull'esistenza della soluzione del problema. VERO FALSO
2. Il problema è convesso. VERO FALSO
3. Il punto $\bar{x} = (-2, 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie di KKT. VERO FALSO
4. Il punto $\bar{x} = (-2, 1)^T$ soddisfa la condizione di stretta complementarità. VERO FALSO
5. Il punto $\bar{x} = (-2, 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine. VERO FALSO

Esercizio 3. (Punteggio massimo = 5) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 12x_1 - 12x_2 + 15x_3 \\ & -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ & -4x_1 - 4x_2 + 5x_3 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema e sia $\bar{x} = (7 \frac{2}{3} \ 7)^T$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 2u_1 + 4u_2 \\ & -3u_1 - 4u_2 \leq 12 \\ & 3u_1 - 4u_2 \leq -12 \\ & 3u_1 + 5u_2 \leq 15 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

- VERO FALSO
2. Il punto $\bar{u} = (-10, 5)^T$ è ammissibile per il duale e si ha $c^T x^* \geq 0$. VERO FALSO
3. Il punto $u^1 = (5, -5)^T$ è ammissibile per il problema duale e si ha $b^T u^* \geq -10$. VERO FALSO
4. Esiste una soluzione ottima u^* per il duale e il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale si trova nell'intervallo $[0, 181]$. VERO FALSO
5. Il punto $x^* = (\frac{2}{3} \ 0 \ \frac{4}{3})^T$ è ottimo per il primale ed esiste una soluzione ottima per il duale. VERO FALSO

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Si supponga di avere la seguente dichiarazioni di variabili e parametri nel file .mod:

```
set S;
param T;
param p{S};
param q{S,1..T};
param c{1..T}
var x{S,1..T}>= 0;
```

1. Si supponga di avere la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in S} p_i \sum_{j=1}^T x_{ij} - \sum_{j=1}^{T-1} c_j \sum_{i \in S} x_{ij}$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```
minimize f:sum{i in S}p[i]*sum{j in 1..T}x[i,j]-sum{j in
1..T-1}c[j]*sum{i in S}x[i,j];
```

VERO

FALSO

2. La traduzione in AMPL del vincolo:

$$\sum_{i \in S} x_{ij} \leq c_{j+1}, \quad j = 1..T - 1$$

è la seguente:

```
s.t. vinc{1..T-1}:sum{i in S}x[i,j]<=c[j+1];
```

VERO

FALSO

3. Si supponga che l'insieme S sia costituito dagli elementi S_1, S_2, S_3 , che il parametro T valga 2 e che il parametro q debba assumere i seguenti valori:

q	S1	S2	S3
1	1	2.5	1
2	2.5	1	3.5

La seguente assegnazione nel file .dat è corretta:

```
param q: S1 S2 S3:=
1 1 2.5 1
2 2 2.5 3.5;
```

VERO

FALSO

Esercizio 5 (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} f(x)$$

ed un punto \bar{x} tale che $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\nabla^2 f(\bar{x}) \succeq 0$ il punto \bar{x} può essere minimo locale

VERO

FALSO

2. Una direzione d tale che $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$ non può mai essere di discesa

VERO

FALSO

3. Esiste un valore α_{\max} e una d tali che $f(\bar{x} + \alpha d) < f(\bar{x})$ per ogni $\alpha \in (0, \alpha_{\max})$

VERO

FALSO

4. Se la matrice $\nabla^2 f(\bar{x})$ è definita positiva, la direzione di Newton nel punto \bar{x} è di discesa

VERO

FALSO

Esercizio 6 (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e le funzioni $g_j(x)$ sono strettamente convesse per ogni $j = 1, \dots, m$, allora si può concludere che il problema è strettamente convesso

VERO

FALSO

2. Se il problema ammette una soluzione locale allora l'insieme ammissibile è compatto.

VERO

FALSO

3. Se $f(x)$ è convessa e i vincoli sono lineari, ovvero $g_j(x) = a_j^T x - b_j$ le condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker sono necessarie e sufficienti di ottimo globale

VERO

FALSO

4. Se un punto \bar{x} è minimo locale, allora valgono le condizioni di KKT e risulta

$$d^T \nabla^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}) d \geq 0 \quad \text{per ogni } d \in \mathbb{R}^n.$$

VERO

FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il corrispondente problema duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ & A^T u = c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

dove $u \in \mathbb{R}^m$.

VERO

FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita, con valore della funzione obiettivo $c^T x^*$ allora il valore ottimo del problema duale soddisfa $b^T u^* = c^T x^*$.

VERO

FALSO

3. Se \bar{x} è un punto tale che $A\bar{x} \leq b$, allora $c^T \bar{x} \leq c^T x^*$.

VERO

FALSO

4. Se il problema duale è illimitato, allora il primale ha insieme ammissibile vuoto.

VERO

FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito C

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + 3x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è coerciva.

 VERO FALSO

2. La funzione ammette un unico minimo globale.

 VERO FALSO3. Il punto $x^* = (-\frac{2}{3}, -1, -\frac{3}{2})^T$ è un minimo globale. VERO FALSO4. La direzione $d = (-1, -2, 0)^T$ è di discesa in $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$ VERO FALSO5. Nel punto $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$, il passo $\alpha = \frac{1}{5}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente con il parametro $\gamma = \frac{1}{6}$. VERO FALSO**Esercizio 2** (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2}(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 2)^2 \\ & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 4 \\ & x_1 \geq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema ammette soluzione globale (rispondere utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass)
2. Il problema è convesso.
3. Il punto $\bar{x} = (1, -2)^T$ soddisfa le condizioni necessarie di KKT.
4. Il punto $\bar{x} = (1, -2)^T$ soddisfa la condizione di stretta complementarità.
5. Se il secondo membro del primo vincolo passa da 4 a $4 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$, la funzione obiettivo all'ottimo peggiora.

Esercizio 3. (Punteggio massimo = 5) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 21x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema e sia $\bar{x} = (1 \ 1 \ 4)^T$.

1. Risulta $c^T x^* \leq 39$.

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + 4u_2 \\ & 7u_1 + u_2 \leq 21 \\ & -2u_1 - u_2 \leq 2 \\ & -u_1 + u_2 \leq 4 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

3. Il punto $\bar{u} = (0, 0)^T$ è ammissibile per il problema duale e si ha $c^T x^* \geq 0$.

4. Il punto $x^* = (\frac{5}{8}, 0, \frac{27}{8})^T$ è ottimo per il primale ed esiste una soluzione ottima per il duale (utilizzare le condizioni di complementarità).

5. Il duale è illimitato superiormente.

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Si supponga di avere la seguente dichiarazioni di variabili e parametri nel file .mod:

```

set S;
param T;
param p{S};
param q{S,1..T};
param c{1..T}
var x{S,1..T}>= 0;

```

1. Si supponga di avere la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i \in S} p_i \sum_{j=1}^T x_{ij} - \sum_{j=1}^{T-1} c_j \sum_{i \in S} x_{ij}$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```

maximize f{j in 1..T}:sum{i in S}p[i]*sum{j in 1..T}x[i,j]-sum{j in
1..T-1}c[j]*sum{i in S}x[i,j];

```

VERO

FALSO

2. La traduzione in AMPL del vincolo:

$$\sum_{i \in S} x_{ij} \leq c_{j+1}, \quad j = 1..T - 1$$

è la seguente:

```

s.t. vinc{j in 1..T-1}:sum{i in S}x[i,j]<=c[j+1];

```

VERO

FALSO

3. Si supponga che l'insieme S sia costituito dagli elementi S1, S2, S3, che il parametro T valga 2 e che il parametro q debba assumere i seguenti valori:

q	S1	S2	S3
1	1	2.5	1
2	2.5	1	3.5

La seguente assegnazione nel file .dat è corretta:

```

param q: S1 1 1 2.5 1 S2 2 2 2.5 3.5 S3;

```

VERO

FALSO

Esercizio 5 (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} f(x)$$

ed un punto \bar{x} . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è lineare non costante, non esiste soluzione al problema $\min_{R^n} f(x)$.

VERO

FALSO

2. Se $f(x)$ è convessa, esiste sempre una soluzione al problema $\min_{R^n} f(x)$.

VERO

FALSO

3. L'approssimazione quadratica della funzione in un intorno del punto \bar{x} è

$$f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x})(x - \bar{x})$$

VERO

FALSO

4. Il metodo di Newton puro può non convergere se non si sceglie opportunamente il punto iniziale

VERO

FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è lineare e le funzioni $g_j(x)$ sono CONVESSE per ogni $j = 1, \dots, m$, allora il problema è convesso

VERO

FALSO

2. Se l'insieme ammissibile è compatto, esiste sicuramente un minimo globale indipendentemente dalle caratteristiche della funzione obiettivo.

VERO

FALSO

3. Se un punto di minimo non è regolare allora sicuramente NON soddisfa le condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker.

VERO

FALSO

4. Una funzione di penalità esterna per questo problema è

$$f(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2.$$

VERO

FALSO

Esercizio 7. (Punteggio massimo = 1) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il corrispondente problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T u \\ & A^T u = c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

dove $u \in \mathbb{R}^m$.

VERO

FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita, con valore della funzione obiettivo $c^T x^*$ allora si può verificare che il valore ottimo del problema duale soddisfi $b^T u^* > c^T x^*$.
 VERO FALSO
3. Se \bar{x} è un punto tale che $A\bar{x} \geq b$, allora $c^T \bar{x} \leq c^T x^*$.
 VERO FALSO
4. Se il problema duale non ha insieme vuoto, allora il primale o ammette soluzione ottima finita oppure ha insieme ammissibile vuoto.
 VERO FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito D

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2}x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_3^2 + x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione non è coerciva.

 VERO FALSO

2. La funzione è strettamente convessa.

 VERO FALSO3. Il punto $x^* = (\frac{1}{3}, 2, 2)^T$ è un punto di sella. VERO FALSO4. La direzione $d = (0, -1, 0)^T$ è di discesa in $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$ VERO FALSO5. Nel punto $\hat{x} = (0, 0, 0)^T$, il passo $\alpha = \frac{1}{5}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente con il parametro $\gamma = \frac{1}{4}$. VERO FALSO**Esercizio 2** (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 1)^2 \\ & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 4 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

- Utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass non si può concludere nulla sull'esistenza della soluzione del problema.
- Il problema è convesso.
- Il punto $\bar{x} = (2, 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie di KKT.
- Il punto $\bar{x} = (2, 1)^T$ soddisfa la condizione di stretta complementarità.
- Il punto $\bar{x} = (2, 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

Esercizio 3. (Punteggio massimo = 5) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -21x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema e sia $\bar{x} = (2 \ 6 \ 1)^T$.

- Risulta $c^T x^* \geq -26$.

- Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & u_1 + 4u_2 \\ & 7u_1 + 3u_2 \geq -21 \\ & -2u_1 - u_2 \geq 2 \\ & -u_1 + u_2 \geq 4 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

- Il punto $\bar{u} = (-2, 0)^T$ è ammissibile per il problema duale e si ha $c^T x^* \leq -2$.

- Il punto $x^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{2})^T$ è ottimo per il primale ed esiste una soluzione ottima per il duale (utilizzare le condizioni di complementarità).

- La funzione obiettivo all'ottimo vale 0.5.

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Si supponga di avere la seguente dichiarazioni di variabili e parametri nel file .mod:

```
set S;
param T;
param p{S};
param q{S,1..T};
param c{1..T}
var x{S,1..T}>= 0;
```

1. Si supponga di avere la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in S} p_i \sum_{j=1}^T x_{ij} - \sum_{j=1}^T c_j \sum_{i \in S} x_{ij}$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```
minimize f:sum{i in S}p[i]*sum{j in 1..T}x[i,j]-sum{j in
1..T}c[j]*sum{i in S}x[i,j];
```

VERO

FALSO

2. La traduzione in AMPL del vincolo:

$$\sum_{i \in S} x_{iT} \leq c_T$$

è la seguente:

```
s.t. vinc{1..T-1}:sum{i in S}x[i,T]<=c[j];
```

VERO

FALSO

3. Si supponga che l'insieme S sia costituito dagli elementi S_1, S_2, S_3 , che il parametro T valga 2 e che il parametro q debba assumere i seguenti valori:

q	S1	S2	S3
1	1	2.5	1
2	2.5	1	3.5

La seguente assegnazione nel file .dat è corretta:

```
param q: S1 S2 S3:=
1 1 2.5 1
2 2.5 1 3.5;
```

VERO

FALSO

Esercizio 5 (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} f(x)$$

ed un punto \bar{x} . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $\nabla^2 f(\bar{x}) \succeq 0$ il punto \bar{x} può essere minimo locale

VERO

FALSO

2. L'approssimazione lineare della funzione in un intorno del punto \bar{x} è

$$f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

VERO

FALSO

3. Una direzione d tale che $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$ è sicuramente di discesa

VERO

FALSO

4. Se $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ e la matrice $\nabla^2 f(\bar{x})$ è definita positiva, la direzione di Newton nel punto \bar{x} è di discesa

VERO

FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se la funzione obiettivo è continua e l'insieme ammissibile è compatto, il problema ammette sempre un minimo locale.

VERO

FALSO

2. Se $f(x)$ è lineare e $g_j(x)$ sono strettamente convesse per ogni $j = 1, \dots, m$, allora il problema è strettamente convesso.

VERO

FALSO

3. Se x^* è una soluzione regolare allora esiste λ^* tale che $\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0$ e $\lambda^{*T}g(x^*) \geq 0$.

VERO

FALSO

4. Se in un punto x^* esiste $\lambda^* \geq 0$ tale che

$$\begin{aligned} \nabla L(x^*, \lambda^*) &= 0 \\ d^T \nabla^2 L(x^*, \lambda^*) d &\geq 0 \quad \text{per ogni } d : \nabla g_a(x^*)^T d = 0 \end{aligned}$$

(dove $g_a(x^*)$ indica i vincoli attivi), il punto è minimo locale stretto.

VERO

FALSO

Esercizio 7. (Punteggio massimo = 1) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il corrispondente problema duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ & A^T u \geq c \end{aligned}$$

dove $u \in \mathbb{R}^m$.

VERO

FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita, con valore della funzione obiettivo $c^T x^*$ allora si può verificare che il valore ottimo del problema duale soddisfi $b^T u^* \neq c^T x^*$.

VERO

FALSO

3. Se \bar{x} è un punto tale che $A\bar{x} \leq b$, $\bar{x} \geq 0$, allora $c^T \bar{x} \leq c^T x^*$.

VERO

FALSO

4. Se il problema duale non ammette ottimo finito, allora il primale o è illimitato oppure ha insieme ammissibile vuoto.

VERO

FALSO