

**ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A**

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

**VALUTAZIONE**

Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min f(x_1, x_2) = 5x_1^3 + 7x_1^2x_2^3 - x_1x_2^2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

2. Il punto  $(0, 0)$  soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.3. Il punto  $(0, 0)$  può essere un minimo.4. La direzione  $d = (-1, 0)^T$  è di discesa in  $\hat{x} = (1, 0)^T$ 5. Nel punto  $\hat{x} = (1, 0)^T$ , l'approssimazione quadratica della funzione ammette minimo.**Esercizio 2.** (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \\ & (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 4 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema ammette soluzione globale (rispondere utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass)
2. Il problema non è convesso.
3. Il punto  $\bar{x} = (2, 4)^T$  soddisfa le condizioni necessarie di KKT.
4. Il punto  $\bar{x} = (2, 4)^T$  soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.
5. Il punto  $\bar{x} = (4, 2)^T$  soddisfa le condizioni necessarie di KKT.

**Esercizio 3.** (Punteggio massimo = 5) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -20x_1 + 12x_2 + 2x_3 \\ & 4x_1 + 4x_2 - x_3 = 5 \\ & -5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima di tale problema.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 5u_1 + u_2 \\ & 4u_1 - 5u_2 \geq -20 \\ & 4u_1 + 3u_2 \geq 12 \\ & -u_1 + 2u_2 \geq 2 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).



2. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 5u_1 + u_2 \\ & 4u_1 - 5u_2 \geq -20 \\ & 4u_1 + 3u_2 \geq 12 \\ & -u_1 + 2u_2 \geq 2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).



3. Il punto  $\bar{x} = (\frac{11}{32}, \frac{29}{32}, 0)^T$  è ammissibile per il primale e si ha  $c^T x^* \geq 4$ , dove  $x^*$  è la soluzione ottima del problema primale, se esiste.



4. Il problema primale è illimitato (utilizzare la soluzione grafica).



5. Il punto  $u^* = (0, 4)^T$  è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima per il primale.



**Esercizio 4.** (Punteggio massimo = 3) Si supponga di avere la seguente dichiarazioni di variabili e parametri nel file .mod:

```

set T;
param S;
param p{1..S};
param q{1..S,T};
param c{T}
var x{1..S,T}>= 0;

```

1. Si supponga di avere la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i=1}^S p_i \sum_{j \in T} x_{ij} - \sum_{j \in T} c_j \sum_{i=1}^S x_{ij}$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```

minimize f:sum{i in 1..S}p[i]*sum{j in T}x[i,j]-sum{j in
T}c[j]*sum{i in 1..S}x[i,j];

```

 VERO

 FALSO

2. La traduzione in AMPL del vincolo:

$$\sum_{j \in T} x_{ij} \leq \sum_{j \in T} x_{Sj}, \quad i \in 1..S-1$$

è la seguente:

```

s.t. vinc{i in 1..S-1}:sum{j in T}x[i,j]<=sum{j in T}x[S,j];

```

 VERO

 FALSO

3. Si supponga che l'insieme T sia costituito dagli elementi T1, T2 che il parametro S valga 3 e che il parametro q debba assumere i seguenti valori:

q	T1	T2
1	1	2.5
2	2.5	1
3	2	3.5

La seguente assegnazione nel file .dat è corretta:

```

param q :=T1 T2
         1 1 2.5
         2 2.5 1
         3 2 3.5;

```

 VERO

 FALSO

### Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + d.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $Q \succ 0$ , e in assenza di ulteriori informazioni, si può affermare che la funzione è convessa

 VERO

 FALSO

2. È possibile che  $Q \succ 0$  e non esista soluzione al sistema  $Qx + c = 0$

VERO

FALSO

3. Una direzione  $d$  tale che  $(Q\bar{x} + c)^T d = 0$  e  $d^T Q d < 0$  è di discesa

VERO

FALSO

4. Sia  $Q \succ 0$ , il massimo numero di direzioni coniugate tra loro è  $n$

VERO

FALSO

**Esercizio 6.** (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & Ax = b \end{aligned}$$

con  $A$  matrice  $p \times n$  e  $b \in R^p$ . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se la funzione obiettivo è strettamente convessa, il problema è convesso.

VERO

FALSO

2. Dato un punto  $\bar{x}$  ammissibile e una direzione  $d$  tale che  $Ad = 0$ , il punto  $\bar{x} + \alpha d$  è ammissibile per qualunque valore di  $\alpha$ .

VERO

FALSO

3. Se  $x^*$  è un punto ammissibile e non esiste un  $\mu^*$  tale che  $\nabla f(x^*) + A^T \mu^* = 0$  allora  $x^*$  sicuramente non è un minimo locale.

VERO

FALSO

4. Sia  $\bar{x}$  un punto di minimo e sia  $\bar{\mu}$  il corrispondente moltiplicatore di Lagrange. Se il termine noto dei vincoli varia da  $b$  a  $b + \epsilon$  con  $\epsilon \in R^p$  e piccolo, il valore della funzione obiettivo  $f(\bar{x}(\epsilon))$  nella nuova soluzione ottima è pari a  $f(\bar{x}) + \epsilon^T \bar{\mu}$ .

VERO

FALSO

**Esercizio 7.** (Punteggio massimo = 1) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \end{aligned}$$

con  $A$  matrice  $m \times n$  e  $x \in R^n$  e si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima, se esiste.

1. Il corrispondente problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T u \\ & A^T u = c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

dove  $u \in R^m$ .

VERO

FALSO

2. Se esistono un punto  $u^* \in R^m$  e un punto  $x^* \in R^n$  tali che

$$\begin{aligned} b^T u^* &= c^T x^* \\ Ax^* &\geq b \\ A^T u^* &= c \\ u^* &\geq 0 \\ u^{*T}(b - Ax^*) &= 0 \end{aligned}$$

allora  $x^*$  e  $u^*$  sono rispettivamente la soluzione ottima del problema primale e del problema duale.

VERO

FALSO

3. Se  $\bar{x}$  è un punto tale che  $A\bar{x} \geq b$ , e  $\bar{u}$  è un punto tale che  $A^T\bar{u} = c$ ,  $\bar{u} \geq 0$  allora  $c^T\bar{x} \geq b^T\bar{u}$ .

VERO

FALSO

4. Se il problema duale è illimitato, allora il primale ha insieme ammissibile vuoto.

VERO

FALSO

**ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B**

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

**VALUTAZIONE**

Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min f(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + x_1^2.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione non è convessa in  $\mathcal{R}^2$ . VERO FALSO2. Il punto  $x^* = (3, 1)$  soddisfa la condizione necessaria del primo ordine. VERO FALSO3. Il punto  $x^* = (3, 1)^T$  è un minimo. VERO FALSO4. La direzione  $d = (0, -2)^T$  è di discesa in  $\hat{x} = (1, 0)^T$  VERO FALSO5. Nel punto  $\hat{x} = (1, 0)^T$ , l'approssimazione quadratica della funzione è indefinita. VERO FALSO**Esercizio 2.** (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 \\ & (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \\ & (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 4 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema ammette soluzione globale (rispondere utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass).
2. Il problema è convesso.
3. Il punto  $\bar{x} = (4, 2)^T$  soddisfa le condizioni necessarie di KKT.
4. Il punto  $\bar{x} = (4, 2)^T$  soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.
5. Il punto  $\bar{x} = (2, 4)^T$  soddisfa le condizioni necessarie di KKT.

**Esercizio 3.** (Punteggio massimo = 5) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & 20x_1 - 12x_2 - 2x_3 \\ & -4x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ & 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima di tale problema.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 2u_1 - u_2 \\ & -4u_1 + 5u_2 \geq 20 \\ & -4u_1 - 3u_2 \geq -12 \\ & u_1 - 2u_2 \geq -2 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

2. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 2u_1 - u_2 \\ & -4u_1 + 5u_2 \geq 20 \\ & -4u_1 - 3u_2 \geq -12 \\ & u_1 - 2u_2 \geq -2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

3. Il punto  $\bar{u} = (-2, 4)^T$  è ammissibile per il duale e si ha  $b^T u^* \geq -8$ , dove  $u^*$  è la soluzione ottima del problema duale, se esiste.

4. Il problema primale è vuoto (utilizzare la soluzione grafica).

5. Il punto  $x^* = (0 \ 0 \ 1)^T$  è ottimo per il primale ed esiste una soluzione ottima per il duale.

**Esercizio 4.** (Punteggio massimo = 3) Si supponga di avere la seguente dichiarazioni di variabili e parametri nel file .mod:

```

set S;
param T;
param p{S};
param q{S,1..T};
param c{1..T}
var x{S,1..T}>= 0;

```

1. Si supponga di avere la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in S} p_i \sum_{j=1}^T x_{ij} - \sum_{j=1}^{T-1} c_j \sum_{i \in S} x_{ij}$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```

minimize sum{i in S}p[i]*sum{j in 1..T}x[i,j]-sum{j in
1..T-1}c[j]*sum{i in S}x[i,j];

```

 VERO

 FALSO

2. La traduzione in AMPL del vincolo:

$$\sum_{i \in S} x_{ij} \leq c_j, \quad j = 1..T$$

è la seguente:

```

s.t. vinc{j in 1..T}:sum{i in S}x[i,j]<=c[j];

```

 VERO

 FALSO

3. Si supponga che l'insieme S sia costituito dagli elementi S1, S2, S3, che il parametro T valga 3 e che un parametro q debba assumere i seguenti valori:

q	S1	S2	S3
1	1	2.5	1
2	2.5	1	3
3	3.5	1	3.5

La seguente assegnazione nel file .dat è corretta:

```

param q: S1 S2 S3:=
1 1 2.5 1
2 2.5 1 3
3 3.5 1 3.5;

```

 VERO

 FALSO

### Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + d.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $Q \succ 0$ , e in assenza di ulteriori informazioni, si può affermare che la funzione ammette almeno un minimo

 VERO

 FALSO

2. Se  $Q\bar{x} + c = 0$  e  $Q \prec 0$  il punto  $\bar{x}$  è un massimo locale

VERO

FALSO

3. Se  $Q\bar{x} + c \neq 0$  allora nel punto  $\bar{x}$  esiste sicuramente una direzione di discesa.

VERO

FALSO

4. Sia  $Q \succ 0$ , il metodo delle direzioni coniugate determina il minimo della funzione quadratica in al più  $n$  passi

VERO

FALSO

**Esercizio 6.** (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & h(x) = 0 \end{aligned}$$

con  $h : R^n \rightarrow R^p$ . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Una direzione  $d$  tale che  $\nabla h(\bar{x})^T d = 0$  è ammissibile nel punto  $\bar{x}$ .

VERO

FALSO

2. In una soluzione  $x^*$  deve valere la condizione di complementarità  $\mu^{*T} h(x^*) = 0$ .

VERO

FALSO

3. Se  $x^*$  è una soluzione, è soluzione anche del problema

$$\begin{aligned} \min \quad & (f(x) + c) \\ & h(x) = 0 \end{aligned}$$

dove  $c$  è una costante.

VERO

FALSO

4. Sia  $x^*$  un punto che soddisfa le condizioni necessarie di KKT con corrispondente moltiplicatore  $\mu^*$ . Se risulta

$$d^T \nabla^2 L(x^*, \mu^*) d > 0 \quad \forall d : \nabla h(x^*)^T d = 0,$$

allora  $x^*$  è una soluzione locale del problema.

VERO

FALSO

**Esercizio 7.** (Punteggio massimo = 1) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con  $A$  matrice  $m \times n$  e  $x \in R^n$  e si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima, se esiste.

1. Il corrispondente problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T u \\ & A^T u = c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

dove  $u \in R^m$ .

VERO

FALSO

2. Se esistono un punto  $u^* \in \mathfrak{R}^m$  e un punto  $x^* \in \mathfrak{R}^n$  tali che

$$\begin{aligned}b^T u^* &= c^T x^* \\Ax^* &\geq b \\x^* &\geq 0 \\A^T u^* &\leq c \\u^* &\geq 0 \\u^{*T}(b - Ax^*) &= 0 \\x^{*T}(A^T u^* - c) &= 0\end{aligned}$$

allora  $x^*$  e  $u^*$  sono rispettivamente la soluzione ottima del problema primale e del problema duale.

VERO

FALSO

3. Se  $\bar{x}$  è un punto tale che  $A\bar{x} \geq b$ ,  $\bar{x} \geq 0$  e  $\bar{u}$  è un punto tale che  $A^T \bar{u} \leq c$ ,  $\bar{u} \geq 0$  allora  $c^T \bar{x} \geq b^T \bar{u}$ .

VERO

FALSO

4. Se il problema duale ha insieme ammissibile vuoto, allora il primale ha insieme ammissibile vuoto.

VERO

FALSO

**ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito C**

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

**VALUTAZIONE**

Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min f(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + x_1^2.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in
- $\mathfrak{R}^2$
- .

 VERO FALSO

2. Il punto
- $x^* = (-3, 1)$
- soddisfa la condizione necessaria del primo ordine.

 VERO FALSO

3. Il punto
- $x^* = (-3, 1)^T$
- può essere un minimo.

 VERO FALSO

4. La direzione
- $d = (-5, 0)^T$
- è di discesa in
- $\hat{x} = (1, 0)^T$

 VERO FALSO

5. Nel punto
- $\hat{x} = (1, 0)^T$
- , l'approssimazione quadratica della funzione ammette minimo.

 VERO FALSO**Esercizio 2.** (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - x_2 \\ & (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \\ & (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 4 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema ammette soluzione globale (rispondere utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass)
2. Il problema non è convesso.
3. Il punto  $\bar{x} = (-2, 4)^T$  soddisfa le condizioni necessarie di KKT.
4. Il punto  $\bar{x} = (-2, 4)^T$  soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.
5. Il punto  $\bar{x} = (-4, 2)^T$  soddisfa le condizioni necessarie di KKT.

**Esercizio 3.** (Punteggio massimo = 5) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 20x_1 + 12x_2 - 2x_3 \\ & -4x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5 \\ & 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima di tale problema.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 5u_1 + u_2 \\ & -4u_1 + 5u_2 \leq 20 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_1 - 2u_2 \leq -2 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).



2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 5u_1 + u_2 \\ & -4u_1 + 5u_2 \leq 20 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_1 - 2u_2 \leq -2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).



3. Il punto  $\bar{x} = (0, 2, 0)^T$  è ammissibile per il primale e si ha  $c^T x^* \leq 24$ , dove  $x^*$  è la soluzione ottima del problema primale, se esiste.



4. Il problema primale è illimitato (utilizzare la soluzione grafica).



5. Il punto  $u^* = (\frac{18}{11}, \frac{20}{11})^T$  è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima per il primale.



**Esercizio 4.** (Punteggio massimo = 3) Si supponga di avere la seguente dichiarazioni di variabili e parametri nel file .mod:

```

set S;
param T;
param p{S};
param q{S,1..T};
param c{1..T}
var x{S,1..T}>= 0;

```

1. Si supponga di avere la seguente funzione obiettivo:

$$\max \sum_{i \in S} p_i \sum_{j=1}^{T-1} x_{ij} - \sum_{j=1}^T c_j \sum_{i \in S} x_{ij}$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```

maximize f:sum{i in S}p[i]*sum{j in 1..T-1}x[i,j]-sum{j in
1..T}c[j]*sum{i in S}x[i,j];

```

VERO

FALSO

2. La traduzione in AMPL del vincolo:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq \sum_{j=1}^T c_j$$

è la seguente:

```

s.t. vinc{j in 1..T}:sum{i in S}x[i,j]<=sum{j in 1..T}c[j];

```

VERO

FALSO

3. Si supponga che l'insieme  $S$  sia costituito dagli elementi  $S_1, S_2, S_3$ , che il parametro  $T$  valga 3 e che il parametro  $q$  debba assumere i seguenti valori:

q	S1	S2	S3
1	1	2.5	1
2	2	2.5	3.5
3	2.5	1	3.5

La seguente assegnazione nel file .dat è corretta:

```

param q: S1 1 1 2.5 1 S2 2 2 2.5 3.5 3 2.5 1 3.5 S3;

```

VERO

FALSO

### Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + d.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $Q \succ 0$  si può affermare che la funzione ammette un minimo se e solo se esistono soluzioni del sistema  $Qx + c = 0$

VERO

FALSO

2. Se  $Q\bar{x} + c \neq 0$ , il punto  $\bar{x}$  NON è minimo locale

3. Se  $Q\bar{x} + c = 0$  allora nel punto  $\bar{x}$  esiste sicuramente una direzione di discesa.

4. Sia  $Q \succ 0$ , il metodo delle direzioni coniugate determina il minimo della funzione quadratica esattamente in  $n$  passi

**Esercizio 6.** (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se il problema è convesso, anche il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x) \\ & g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

è convesso.

2. In un punto ammissibile è sempre possibile definire una direzione ammissibile.

3. Sia  $x^*$  una soluzione locale e  $\lambda^*$  il corrispondente moltiplicatore. Se il secondo membro del vincolo varia da 0 a  $\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}^p$ , allora il valore della funzione obiettivo all'ottimo per piccoli valori di  $\bar{\epsilon}$  è dato da  $f(x^*) + \lambda^{*T}\bar{\epsilon}$ .

4. In una soluzione  $x^*$  i vincoli strettamente attivi sono quelli per cui risulta  $g_i(x^*) = 0$ ,  $\lambda_i^* = 0$ .

**Esercizio 7.** (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax = b \end{aligned}$$

con  $A$  matrice  $m \times n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  e si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima, se esiste.

1. Il corrispondente problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T u \\ & A^T u = c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

dove  $u \in \mathbb{R}^m$ .

2. Se esistono un punto  $u^* \in \mathfrak{R}^m$  e un punto  $x^* \in \mathfrak{R}^n$  tali che

$$\begin{aligned}b^T u^* &= c^T x^* \\ Ax^* &= b \\ A^T u^* &= c\end{aligned}$$

allora  $x^*$  e  $u^*$  sono rispettivamente la soluzione ottima del problema primale e del problema duale.

VERO

FALSO

3. Se  $\bar{x}$  è un punto tale che  $A\bar{x} = b$ , e  $\bar{u}$  è un punto tale che  $A^T\bar{u} = c$ , allora  $c^T\bar{x} \leq b^T\bar{u}$ .

VERO

FALSO

4. Se il problema duale è illimitato, allora il primale ha soluzione ottima finita.

VERO

FALSO

**ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito D**

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

**VALUTAZIONE**

Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min f(x_1, x_2) = -x_1^2 x_2 + 3x_2^2 + x_1^2.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione non è convessa in
- $\mathfrak{R}^2$
- .

 VERO FALSO

2. Il punto
- $x^* = (0, 0)$
- soddisfa la condizione necessaria del primo ordine.

 VERO FALSO

3. Il punto
- $x^* = (0, 0)^T$
- è sicuramente un minimo.

 VERO FALSO

4. La direzione
- $d = (0, 2)^T$
- è di discesa in
- $\hat{x} = (1, 0)^T$

 VERO FALSO

5. Nel punto
- $\hat{x} = (2, 0)^T$
- , l'approssimazione quadratica della funzione è indefinita.

 VERO FALSO**Esercizio 2.** (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - x_2 \\ & (x_1 + 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \\ & (x_1 + 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 4 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema ammette soluzione globale (rispondere utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass)
2. Il problema non è convesso.
3. Il punto  $\bar{x} = (-4, 2)^T$  soddisfa le condizioni necessarie di KKT.
4. Il punto  $\bar{x} = (-4, 2)^T$  soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.
5. Il punto  $\bar{x} = (-2, 4)^T$  soddisfa le condizioni necessarie di KKT.

**Esercizio 3.** (Punteggio massimo = 5) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 20x_1 - 12x_2 + 2x_3 \\ & -4x_1 - 4x_2 - x_3 = 3 \\ & 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima di tale problema.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 3u_1 + 6u_2 \\ & -4u_1 + 5u_2 \leq 20 \\ & -4u_1 - 3u_2 \leq -12 \\ & -u_1 + 2u_2 \leq 2 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 3u_1 + 6u_2 \\ & -4u_1 + 5u_2 \leq 20 \\ & -4u_1 - 3u_2 \leq -12 \\ & -u_1 + 2u_2 \leq 2 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

3. Il punto  $\bar{u} = (4, 0)^T$  è ammissibile per il duale e si ha  $b^T u^* \geq 12$ , dove  $u^*$  è la soluzione ottima del problema duale, se esiste.

4. Il problema primale è vuoto (utilizzare la soluzione grafica).

5. Il punto  $x^* = (0 \ 0 \ 1)^T$  è ottimo per il primale ed esiste una soluzione ottima per il duale.

**Esercizio 4.** (Punteggio massimo = 3) Si supponga di avere la seguente dichiarazioni di variabili e parametri nel file .mod:

```

set S;
param T;
param p{S};
param q{S,1..T};
param c{1..T}
var x{S,1..T}>= 0;

```

1. Si supponga di avere la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in S} p_i \sum_{j=1}^T x_{ij} - \sum_{j=1}^T c_j \sum_{i \in S} x_{ij}$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```

minimize sum{i in S}p[i]*sum{j in 1..T}x[i,j]-sum{j in
1..T}c[j]*x[i,j];

```

 VERO

 FALSO

2. La traduzione in AMPL del vincolo:

$$\sum_{i \in S} x_{iT} \leq c_T$$

è la seguente:

```

s.t. vinc1:sum{i in S}x[i,T]<=c[T];

```

 VERO

 FALSO

3. Si supponga che l'insieme  $S$  sia costituito dagli elementi  $S1, S2, S3$ , che il parametro  $T$  valga 2 e che un parametro  $q$  debba assumere i seguenti valori:

q	S1	S2	S3
1	1	2.5	1
2	2.5	1	3.5
3	2.5	1	3.5

La seguente assegnazione nel file .dat è corretta:

```

param q: S1 S2 S3:=
    1 1 2.5 1
    2 2.5 1 3.5
    3 2.5 1 3.5;

```

 VERO

 FALSO

**Esercizio 5.** (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + d.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $Q \neq 0$  si può affermare che la funzione NON ammette minimo

 VERO

 FALSO

2. Se  $Q\bar{x} + c \neq 0$  il punto  $\bar{x}$  NON è minimo né massimo locale

VERO

FALSO

3. Se  $Q\bar{x} + c = 0$  allora nel punto  $\bar{x}$  può NON esistere una direzione di discesa.

VERO

FALSO

4. Sia  $Q \succ 0$ , il metodo delle direzioni coniugate utilizza direzioni coniugate tra loro

VERO

FALSO

**Esercizio 6.** (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se il problema è convesso, anche il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & -f(x) \\ & -g(x) \geq 0 \end{aligned}$$

è convesso.

VERO

FALSO

2. In un punto ammissibile  $\bar{x}$  tale che  $g(\bar{x}) < 0$ , ogni direzione  $d \in \mathbb{R}^n$  è ammissibile.

VERO

FALSO

3. Sia  $x^*$  una soluzione locale e  $\lambda^*$  il corrispondente moltiplicatore. Se il secondo membro del vincolo varia da 0 a  $\bar{\epsilon} \in \mathbb{R}^p$ , allora il valore della funzione obiettivo all'ottimo per piccoli valori di  $\bar{\epsilon}$  è dato da  $f(x^*) - \lambda^{*T}\bar{\epsilon}$ .

VERO

FALSO

4. In una soluzione  $x^*$  i vincoli strettamente attivi sono quelli per cui risulta  $g_i(x^*) = 0$ ,  $\lambda_i^* = 0$ .

VERO

FALSO

**Esercizio 7.** (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con  $A$  matrice  $m \times n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  e si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima, se esiste.

1. Il corrispondente problema duale è

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T u \\ & A^T u \geq c \\ & u \geq 0 \end{aligned}$$

dove  $u \in \mathbb{R}^m$ .

VERO

FALSO

2. Se esistono un punto  $u^* \in \mathfrak{R}^m$  e un punto  $x^* \in \mathfrak{R}^n$  tali che

$$\begin{aligned}b^T u^* &= c^T x^* \\Ax^* &= b \\A^T u^* &\geq c \\x^* &\geq 0 \\x^{*T}(A^T u^* - c) &= 0\end{aligned}$$

allora  $x^*$  e  $u^*$  sono rispettivamente la soluzione ottima del problema primale e del problema duale.

VERO

FALSO

3. Se  $\bar{x}$  è un punto tale che  $A\bar{x} = b$ ,  $\bar{x} \geq 0$ , e  $\bar{u}$  è un punto tale che  $A^T \bar{u} \geq c$ , allora  $c^T \bar{x} \leq b^T \bar{u}$ .

VERO

FALSO

4. Se il problema duale ha insieme ammissibile vuoto, allora il primale o è illimitato o ha insieme ammissibile vuoto.

VERO

FALSO