ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).
Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1.(*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 x_2 - 4x_1x_2 + \frac{16}{3}x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in R^2

   VERO FALSO

2. Il punto $(2,\ 0)$ soddisfa le condizioni necessarie del primo e del secondo ordine.

   VERO FALSO

3. Nel punto $\bar{x} = (-1,\ 0)^T$ esiste sempre una direzione di discesa.

   VERO FALSO

4. Nell'intorno $\bar{x} + s$ del punto $\bar{x} = (-1,\ 0)^T$ l'approssimazione quadratica $q(s)$ di f è indefinita.

   VERO FALSO

5. Nel punto $x^0 = (-1,\ 0)^T$, il passo $\alpha = 1$ è accettato da una ricerca di linea di tipo Armijio (per ogni $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$) lungo la direzione del metodo del gradiente.

   VERO FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 \\ & x_1 - x_2^2 = 0 \\ & (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leq 4 \end{array}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema ammette soluzione globale (rispondere utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass)

   VERO FALSO

2. Il problema è convesso.

   VERO FALSO

3. Il punto $\bar{x} = (0\ ,0)^T$ è un punto di regolarità.

   VERO FALSO

4. Il punto $\bar{x} = (3\ ,\sqrt{3})^T$ soddisfa le condizioni necessarie di KKT.

   VERO FALSO

5. Se il termine noto del primo vincolo varia da 0 a ϵ con $\epsilon > 0$, il valore della funzione obiettivo migliora.

   VERO FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{array}{l} \min \quad 5x_1 + 20x_2 - 6x_3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Si indichi con u^* la soluzione ottima del suo problema duale (se esiste) e sia $\bar{x} = (5,\ \frac{1}{2},\ 0)^T$.

1. Se esiste u^* risulta $b^T u^* \geq 35$.

   VERO FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & 3u_1 + u_2 \\ & u_1 + u_2 \leq 5 \\ & -4u_1 + 5u_2 \leq 20 \\ & -3u_1 - 2u_2 \leq -6 \\ & \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \end{array}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO FALSO

3. Il punto $\bar{u} = (3,\ 0)^T$ è ammissibile per un problema duale e si ha $c^T x^* \geq 9$, dove x^* è la soluzione ottima del primale.

   VERO FALSO

4. Il punto $x^* = (3\ ,0\ ,0)^T$ è ottimo per il primale ed esiste una soluzione ottima per il duale (utilizzare le condizioni di complementarità).

   VERO FALSO

5. Il duale è illimitato superiormente.

   VERO FALSO

Esercizio 4.(**Punteggio massimo = 3**)

1. Si supponga di avere un problema in cui le variabili di decisione sono dichiarate nel seguente modo:

```
set S;
set T;
var x{i in S, j in T};
```

Si vuole esprimere il vincolo

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in T} x_{ij} = 1$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```
s.t. vinc:sum{i in S, j in T}x[j,i]=1;
```

VERO	FALSO

2. Si assuma che siano stati dichiarati correttamente i due insiemi S e T, le variabili ed un parametro p indicizzato usi due insiemi S e T. Si supponga di voler tradurre in AMPL la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} p_{ij} x_{ij}$$

La traduzione seguente è corretta:

```
minimize f:sum{i in S, j in T}p[i,j]*x[i,j];
```

VERO	FALSO

3. Si supponga che gli insiemi S e T siano dichiarati nel file .dat nel seguente modo

```
set S:= S1 S2 S3;
set T:= T1 T2;
```

e supponiamo che si voglia esprimere il vincolo

$$x[S1, T2] = 1$$

La seguente traduzione In AMPL nel file .mod è corretta:

```
s.t. vinc:x[1,2]=1;
```

VERO	FALSO

Esercizio 5. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + d.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $Q \succeq 0$ la funzione è coerciva

VERO	FALSO

2. Se $Q \succ 0$, e in assenza di ulteriori informazioni, si può affermare che la funzione ammette almeno un minimo

VERO	FALSO

3. Se $Q\bar{x} + c = 0$ il punto $\bar{x}$ è sicuramente un minimo locale

VERO	FALSO

4. Se $Q \succ 0$ e d è una direzione di discesa, allora il valore $\alpha^* = -\dfrac{\nabla f(\bar{x})^T d}{\nabla f(\bar{x})^T Q \nabla f(\bar{x})}$ è tale che $f(\bar{x} + \alpha^* d) \leq f(\bar{x} + \alpha d)$ per ogni $\alpha \geq 0$.

VERO	FALSO

Esercizio 6 (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $g : R^n \to R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e le funzioni $g_j(x)$ sono strettamente convesse per ogni $j = 1, \dots, m$, allora si può concludere che il problema è strettamente convesso

VERO	FALSO

2. Se il problema ammette una soluzione globale allora l'insieme ammissibile è compatto.

VERO	FALSO

3. Se i vincoli sono lineari, ovvero $g_j(x) = a_j^T x - b_j$ ed $f(x)$ convessa le condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker sono necessarie e sufficienti di ottimo globale

VERO	FALSO

4. Se un punto $\bar{x}$ è minimo locale, allora valgono le condizioni di KKT e risulta

$$d^T \nabla^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}) d \geq 0 \quad \text{per ogni } d : \ \nabla g_a(\bar{x})^T d = 0$$

dove $g_a(\bar{x})$ indica i vincoli attivi in $\bar{x}$.

VERO	FALSO

Esercizio 7.(*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il problema duale ha vincoli sia di uguaglianza che di disuguaglianza (non si considerino le limitazioni sulle variabili).

VERO	FALSO

2. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $A\bar{x} \geq b, \ \bar{x} \geq 0$, allora $c^T \bar{x} \geq c^T x^*$.

VERO	FALSO

3. Si supponga che esista una soluzione ottima del primale sia u^* la soluzione ottima del problema duale. Si può verificare $c^T x^* > b^T u^*$.

VERO	FALSO

4. Sia $\bar{u}$ un punto ammissibile del problema duale. Allora si ha $c^T x^* \geq b^T \bar{u}$

VERO	FALSO

5. Se il problema primale ha insieme ammissibile vuoto, allora il duale ha sicuramente insieme ammissibile vuoto.

VERO	FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2^o anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).
Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \; f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2 + \frac{8}{3}x_2^2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione non è convessa in R^2

   VERO FALSO

2. Il punto $(2,\ 1)^T$ è un minimo locale stretto.

   VERO FALSO

3. Il punto $(0,\ 0)^T$ è un minimo locale

   VERO FALSO

4. Nel punto $x^0 = (3,\ 0)^T$ la direzione di Newton è $S_N = (\frac{1}{6}\ 0)^T$

   VERO FALSO

5. Nel punto $x^0 = (-1,\ 0)^T$, il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione $d = (0\ \ -3)^T$ è $\alpha = \frac{11}{48}$.

   VERO FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 \\ & x_1 + x_2^2 = 4 \\ & (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leq 4 \end{array}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

VERO FALSO

2. Utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass non è possibile affermare che il problema ammette soluzione globale.

VERO FALSO

3. Il punto $\bar{x} = (4\ ,0)^T$ è un punto di non regolarità.

VERO FALSO

4. Il punto $\bar{x} = (1\ ,\sqrt{3})^T$ soddisfa le condizioni necessarie di KKT.

VERO FALSO

5. Se il termine noto del primo vincolo varia da 4 a $4+\epsilon$ con $\epsilon > 0$, il valore della funzione obiettivo aumenta.

VERO FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} &\min \quad -4x_1 - x_2 + 15x_3 \\ &-2x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 1 \\ &-x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + u_2 \\ & -2u_1 - u_2 \leq -4 \\ & u_1 - u_2 \leq -1 \\ & -5u_1 + 3u_2 \leq 15 \\ & \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

2. Il punto $\bar{u} = (0\ ,5)^T$ è ammissibile per il duale e si ha $b^T u^* \geq 5$, se u^* esiste.

VERO FALSO

3. Il punto $\bar{x} = (-1\ ,0\ ,0)^T$ è ammissibile per il problema primale e si ha $c^T x^* \leq 4$.

VERO FALSO

4. Il problema duale è illimitato superiormente (utilizzare, se necessario, la soluzione grafica).

VERO FALSO

5. Esiste una soluzione ottima x^* per il problema primale.

VERO FALSO

Esercizio 4.(**Punteggio massimo = 3**)

1. Si supponga di avere un problema in cui le variabili di decisione sono dichiarate nel seguente modo:

```
set S;
set T;
var x{i in S, j in T};
```

Si vuole esprimere il vincolo

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in T} x_{ij} = 1$$

La seguente traduzione in AMPL è corretta:

```
s.t. vinc{i in S}:sum{i in S, j in T}x[j,i]=1;
```

VERO FALSO

2. Si assuma che siano stati dichiarati correttamente i due insiemi S e T, le variabili ed un parametro p indicizzato usi due insiemi S e T. Si supponga di voler tradurre in AMPL la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} p_{ij} x_{ij}$$

La traduzione seguente è corretta:

```
minimize f{i in S}:sum{j in T}p[i,j]*x[i,j];
```

VERO FALSO

3. Si supponga che gli insiemi S e T siano dichiarati nel file .dat nel seguente modo

```
set S:= S1 S2 S3;
set T:= T1 T2;
```

e supponiamo che si voglia esprimere il vincolo

$$x[S1, T2] = 1$$

La seguente traduzione In AMPL nel file .mod è corretta (supponendo che i due parametri ss e tt siano correttamente assegnati nel file .dat):

```
param symbolic ss in S;
param symbolic tt in T;
            .
            .
            .
s.t. vinc:x[ss,tt]=1;
```

VERO FALSO

Esercizio 5. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + d.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $Q \succ 0$ la funzione è coerciva

VERO FALSO

2. Se $Q \succ 0$ allora esiste un'unica soluzione al sistema $Qx + c = 0$

VERO FALSO

3. Se $Q\bar{x} + c = 0$ e $Q \succeq 0$ il punto $\bar{x}$ può essere minimo locale ma non globale

   VERO | FALSO

4. Se $Q \succ 0$, due direzioni $d^1, d^2 \in R^n$ coniugate tra loro sono linearmente indipendenti

   VERO | FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $g : R^n \to R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è lineare e le funzioni $g_j(x)$ sono CONVESSE per ogni $j = 1, \ldots, m$, allora il problema è convesso

   VERO | FALSO

2. Se l'insieme ammissibile è compatto e convesso, esiste sicuramente un minimo globale indipentemente dalle caratteristiche della funzione obiettivo.

   VERO | FALSO

3. Se un punto di minimo non è regolare allora sicuramente NON soddisfa le condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker.

   VERO | FALSO

4. Una funzione di penalità esterna per questo problema è

$$f(x) + \frac{1}{\epsilon}\|g(x)\|^2.$$

   VERO | FALSO

Esercizio 7.(*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax = b \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il problema duale ha soli vincoli di uguaglianza.

   VERO | FALSO

2. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $A\bar{x} = b,\ \bar{x} \geq 0$, allora $c^T\bar{x} \geq c^T x^*$.

   VERO | FALSO

3. Sia u^* la soluzione ottima del problema duale. Si ha $c^T x^* = b^T u^*$.

   VERO | FALSO

4. Se il problema primale è illimitato superiormente, allora il duale ha insieme ammissibile vuoto.

   VERO | FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito C

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).
Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \; f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 x_2 - 4x_1x_2 + \frac{16}{3}x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione non è convessa in R^2

   VERO FALSO

2. Il punto $(2\ , -1)^T$ è un minimo locale.

   VERO FALSO

3. La direzione $d = (0\ \ -3)^T$ è di discesa in $x^0 = (-1,\ 0)^T$.

   VERO FALSO

4. Nell'intorno $\bar{x} + s$ del punto $\bar{x} = (-1,\ 0)^T$ l'approssimazione quadratica $q(s)$ di f non ammette minimo.

   VERO FALSO

5. Nel punto $x^0 = (-1,\ 0)^T$, il passo $\alpha = 1$ è accettato da una ricerca di linea di tipo Armijio (per qualunque $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$) lungo la direzione $d = (0\ \ -3)^T$.

   VERO FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & -x_2 \\ & \frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1 + x_2 = 0 \\ & (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leq 4 \end{array}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO FALSO

2. Utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass è possibile affermare che il problema ammette soluzione globale.

VERO FALSO

3. Il punto $\bar{x} = (2\ ,2)^T$ è un punto di non regolarità.

VERO FALSO

4. Il punto $\bar{x} = (0\ ,0)^T$ non soddisfa le condizioni necessarie di KKT.

VERO FALSO

5. Se il termine noto del primo vincolo varia da 0 a ϵ con $\epsilon > 0$, il valore della funzione obiettivo migliora.

VERO FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} &\min \quad 5x_1 + 20x_2 - 6x_3 \\ &x_1 - 4x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ &x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & u_1 - u_2 \\ & u_1 + u_2 \leq 17 \\ & -4u_1 + 5u_2 \leq 12 \\ & -3u_1 - 2u_2 \leq 35 \\ & \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 - u_2 \\ & u_1 + u_2 \leq 5 \\ & -4u_1 + 5u_2 \leq 20 \\ & -3u_1 - 2u_2 \leq -6 \\ & \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

3. Il punto $\bar{u} = (4,\ 0)^T$ è ammissibile per il problema duale e si ha $b^T u^* \geq 4$, dove u^* è la soluzione ottima del problema duale, se esiste.

VERO FALSO

4. Il duale è illimitato (utilizzare, se necessario, la soluzione grafica).

VERO FALSO

5. Il primale ammette soluzione ottima.

VERO	FALSO

Esercizio 4.(**Punteggio massimo = 3**)

1. Si supponga di avere un problema in cui le variabili di decisione sono $x_{ij},\ i \in S,\ j \in T$ dove S e T sono due insiemi. In AMPL la seguente dichiarazione di variabili è corretta:

```
set S;
set T;
var x{i in S, j in T};
```

VERO	FALSO

2. Si supponga di avere nel file .mod la seguente dichiarazione di parametri:

```
set S;
set T;
param p{S, T};
```

dove l'insieme S è costituito dagli elementi $S1, S2, S3$ e l'insieme Tè costituito dagli elementi $T1, T2$ e dove il parametro p assume i valori riportati in tabella:

p	T1	T2
S1	6	8
S2	1	1.5
S3	11	8

Allora una possibile assegnazione del parametro p nel file.dat è la seguente:

```
set S:= S1 S2 S3;
set T:= T1 T2;
param p: T1   T2 S1 S2 S3 := 6 8 1 1.5 11  8;
```

VERO	FALSO

3. Si assuma che siano stati dichiarati correttamente i due insiemi S e T, le variabili ed il parametro p. Si supponga di voler tradurre in AMPL il vincolo:

$$x_{ij} \leq p_{ij}, \quad i \in S, j \in T$$

La traduzione seguente è corretta:

```
s.t. vinc1{i in S, j in T}:x[i,j]<=p[i,j];
```

VERO	FALSO

Esercizio 5. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x + d.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $Q \succ 0$ la funzione ammette un minimo globale che può non essere unico

VERO	FALSO

2. Se $Q \not\succ 0$ si può affermare che la funzione NON ammette minimo

VERO | FALSO

3. È possibile che $Q \succ 0$ e non esista soluzione al sistema $Qx + c = 0$

VERO | FALSO

4. Se $Q \succ 0$ Due direzioni $d^1, d^2 \in R^n$ coniugate tra loro sono tali che ${d^1}^T Q d^2 = 0$

VERO | FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $g : R^n \rightarrow \ R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se la funzione obiettivo è continua e l'insieme ammissibile è compatto, il problema ammette sempre un minimo globale.

VERO | FALSO

2. Se $g_j(x)$ sono strettamente convesse per ogni $j = 1, \ldots, m$ ed $f(x)$ è lineare, allora il problema è strettamente convesso.

VERO | FALSO

3. Se x^* è un punto regolare e non esiste $\lambda^* \geq 0$ tale che $\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0$, allora x^* non è un punto di minimo.

VERO | FALSO

4. Se in un punto x^* esiste $\lambda^* \geq 0$ tale che

$$\begin{array}{l} \nabla L(x^*, \lambda^*) = 0 \\ d^T \nabla^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0 \quad \text{per ogni } d : \ \nabla g_a(x^*)^T d = 0 \end{array}$$

(dove $g_a(x^*)$ indica i vincoli attivi, allora il punto è minimo locale stretto.

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il problema duale ha m variabili non vincolate in segno.

VERO | FALSO

2. Il problema duale ha soli vincoli di disuguaglianza.

VERO | FALSO

3. Sia $\bar{u}$ un punto ammissibile del problema duale e sia $\bar{x}$ un punto tale che $A\bar{x} \geq b$, allora $c^T \bar{x} \geq b^T \bar{u}$.

VERO | FALSO

4. Se il problema duale ammette ottimo finito, allora il primale ha insieme ammissibile vuoto.

VERO | FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito D

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4 le risposte CORRETTE valgono 1 PUNTO e quelle SBAGLIATE -0.5 PUNTI (VALORE NEGATIVO).
Per gli esercizi 5,6,7 le risposte CORRETTE valgono 0,25 PUNTI e quelle SBAGLIATE -0.25 PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 x_2 - 4x_1 x_2 + \frac{8}{3}x_2^2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in R^2

   VERO FALSO

2. Il punto $(2,\ 1)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del 1^o e 2^o ordine

   VERO FALSO

3. Il punto $(-2,\ -2)^T$ è un minimo locale stretto

   VERO FALSO

4. Nell'intorno $\bar{x} + s$ del punto $\bar{x} = (-1,\ 0)^T$ l'approssimazione quadratica $q(s)$ di f è indefinita.

   VERO FALSO

5. Nel punto $x^0 = (-1,\ 0)^T$, il passo $\alpha = 1$ è accettato da una ricerca di linea di tipo Armijio per $\gamma = \frac{1}{11}$ lungo la direzione $d = (0\ \ -3)^T$.

   VERO FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & x_2 \\ & -\frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1 + x_2 = 0 \\ & (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leq 4 \end{array}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

VERO FALSO

2. Utilizzando esclusivamente il teorema di Weierstrass è possibile affermare che il problema ammette soluzione globale.

VERO FALSO

3. Il punto $\bar{x} = (2\ , -2)^T$ è un punto di regolarità.

VERO FALSO

4. Il punto $\bar{x} = (4\ , 0)^T$ non soddisfa le condizioni necessarie di KKT.

VERO FALSO

5. Se il termine noto del primo vincolo varia da 0 a ϵ con $\epsilon > 0$, il valore della funzione obiettivo migliora.

VERO FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 20x_2 + 6x_3 \\
& x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\
& x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 1 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

e sia $\bar{x} = (0\ 0\ \frac{1}{3})^T$. Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema.

1. Risulta $c^T x^* \geq 2$.

VERO FALSO

2. Il problema

$$
\begin{aligned}
\min \quad & u_1 + u_2 \\
& u_1 + u_2 \geq 5 \\
& -4u_1 + 5u_2 \geq 20 \\
& 3u_1 + 2u_2 \geq 6 \\
& \\
& u_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

3. Il punto $\bar{u} = (0,\ 10)^T$ è ammissibile per il problema duale e si ha $c^T x^* \leq 10$.

VERO FALSO

4. Il punto $x^* = (1\ , 0\ , 0)^T$ è ottimo per il primale ed esiste una soluzione ottima per il duale.

VERO FALSO

5. Il duale è inammissibile.

VERO FALSO

Esercizio 4.(**Punteggio massimo = 3**)

1. Si supponga di avere un problema in cui le variabili di decisione sono $x_{ij},\ i \in S,\ j \in T$ dove S e T sono due insiemi. In AMPL la seguente dichiarazione di variabili è corretta:

```
set S;
set T;
var x{i in S, j in T};
```

VERO	FALSO

2. Si supponga di avere nel file .mod la seguente dichiarazione di parametri:

```
set S;
set T;
param p{S, T};
```

dove l'insieme S è costituito dagli elementi $S1, S2, S3$ e l'insieme Tè costituito dagli elementi $T1, T2$ e dove il parametro p assume i valori riportati in tabella:

p	T1	T2
S1	6	8
S2	1	1.5
S3	11	8

Allora una possibile assegnazione del parametro p nel file.dat è la seguente:

```
set S:= S1 S2 S3;
set T:= T1 T2;
param p: T1   T2 S1 S2 S3 := 6 8 1 1.5 11  8;
```

VERO	FALSO

3. Si assuma che siano stati dichiarati correttamente i due insiemi S e T, le variabili ed il parametro p. Si supponga di voler tradurre in AMPL il vincolo:

$$x_{ij} \leq p_{ij}, \quad i \in S, j \in T$$

La traduzione seguente è corretta:

```
s.t. vinc1{i in S, j in T}:x[i,j]<=p[i,j];
```

VERO	FALSO

Esercizio 5. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + d.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $Q \succ 0$, e in assenza di ulteriori informazioni, si può affermare che la funzione ammette almeno un minimo

VERO	FALSO

2. Se $Q\bar{x} + c \neq 0$ il punto $\bar{x}$ NON è minimo locale

VERO	FALSO

3. Una direzione d tale che $(Q\bar{x} + c)^T d < 0$ è sicuramente di discesa

VERO	FALSO

4. Sia $Q \succ 0$, il massimo numero di direzioni coniugate tra loro è n

VERO FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $g : R^n \rightarrow \ R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è CONTINUA e le funzioni $g_j(x)$ sono CONVESSE per ogni $j = 1, \ldots, m$, allora il problema è convesso

   VERO FALSO

2. Se il problema è convesso, ammette sempre una soluzione globale

   VERO FALSO

3. Se la funzione obiettivo è lineare, le condizioni necessarie di Karush-Kuhn-Tucker sono necessarie e sufficienti di ottimo

   VERO FALSO

4. Se un punto x^* è minimo locale stretto allora esiste $\lambda^* \geq 0$ tale che

   $$\begin{array}{l} \nabla L(x^*, \lambda^*) = 0 \\ d^T \nabla^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0 \quad \text{per ogni } d : \ \nabla g_a(x^*)^T d = 0 \end{array}$$

   (dove $g_a(x^*)$ indica i vincoli attivi cioè quelli per cui $g_j(x^*) = 0$).

   VERO FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il problema duale ha m variabili non vincolate in segno.

   VERO FALSO

2. Il problema duale ha sia vincoli di disuguaglianza che vincoli di uguaglianza.

   VERO FALSO

3. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $A\bar{x} = b, \ \bar{x} \geq 0$, allora $c^T \bar{x} \geq c^T x^*$.

   VERO FALSO

4. Sia $\bar{u}$ un punto ammissibile per il problema duale. Si ha $b^T \bar{u} \geq c^T x^*$.

   VERO FALSO