ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (azzurro)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2º anno

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2x_1$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO **X** FALSO

2. Il problema ammette almeno una soluzione globale.

   VERO FALSO **X**

3. Il problema ammette infinite soluzioni globali.

   VERO FALSO **X**

4. Nel punto $(0, \ -1, \ 0)^T$, la direzione $d = (1, \ 0, \ 1)^T$ risulta essere di discesa.

   VERO **X** FALSO

5. Nel punto $(0, \ 0, \ 0)^T$, il metodo del gradiente con ricerca di linea esatta genera il punto $(-1, \ 0, \ 0)^T$

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2(*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 \\
& x_1^2 + (x_2+1)^2 \le 4 \\
& x_1^2 + x_2^2 \ge 1 \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema NON è convesso.

   | VERO **X** | FALSO |

2. L'insieme ammissibile è regolare.

   | VERO | FALSO **X** |

3. Il punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   | VERO **X** | FALSO |

4. Nel punto di KKT $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ NON è soddisfatta l'ipotesi di stretta complementarità.

   | VERO | FALSO **X** |

5. Il punto di KKT $x_1 = 1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$ con i moltiplicatori $(0,\ 1/\sqrt{2}, 0)$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

   | VERO | FALSO **X** |

Esercizio 3.(*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned}
\min \quad & 15x_1 + 15x_2 + 15x_3 \\
& 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \\
& 5x_1 - 5x_2 - 5x_3 \ge 2 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

   $$\begin{aligned}
   \max \quad & -2u_1 + 2u_2 \\
   & 3u_1 + 5u_2 \le 15 \\
   & 3u_1 - 5u_2 \le 15 \\
   & -3u_1 - 5u_2 \le 15 \\
   & u_1 \ge 0
   \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   | VERO | FALSO **X** |

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & -2u_1 + 2u_2 \\ & 3u_1 + 5u_2 \leq 15 \\ & 3u_1 - 5u_2 \leq 15 \\ & -3u_1 - 5u_2 \leq 15 \\ & u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**	FALSO

3. Il punto $(0,\ 0)^T$ è ammissibile per il duale e per la funzione obiettivo del duale si ha $b^T u^* \geq 0$.

VERO **X**	FALSO

4. Il problema duale è illimitato.

VERO **X**	FALSO

5. Il punto $(5,\ 0)^T$ è ottimo per il duale.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Si supponga di avere un problema di ottimizzazione così definito:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} t_i y_i \\ & \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 \\ & \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_{ij} <= a_i y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{array}$$

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param m;
param n;

param c{1..m,1..n};
param a{1..m};
param t{1..m};
param q{1..m,1..n};
var x{1..m,1..n};
var y{1..m};
```

VERO **X**	FALSO

2. La seguente funzione obiettivo è corretta (supponendo che la definizione nel file .mod sia coerente con le specifiche):

```
minimize f: sum{i in 1..m, j in 1..m}c[i,j]*x[i,j]-t[i]*x[i];
```

VERO	FALSO **X**

3. La seguente scrittura dei vincoli è corretta:

```
subject to v1:sum{i in 1..m}y[i] = 1;
subject to v2{i in 1..m}:q[i,j]*x[i,j]<=a[i]*y[i];
```

VERO	FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Sia dato il problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} \; f(x) = g(x) + C\|x\|^2$$

con $g : R^n \to R$ funzione due volte continuamente differenziabile, lo scalare $C > 0$ e con $\lambda_{\min}(\nabla^2 g(x)) > -\infty$ dove $\lambda_{\min}(\cdot)$ denota l'autovalore minimo della matrice.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $g(x)$ è coerciva, allora il problema ammette un minimo globale.

VERO **X**	FALSO

2. Esiste un valore di C sufficientemente grande per cui la funzione f risulta convessa.

VERO **X**	FALSO

3. In un punto x^k, il metodo del gradiente con ricerca di linea é definito da un'iterazione del tipo:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha(\nabla g(x^k) + 2Cx^k)$$

VERO **X**	FALSO

4. Esiste un valore di C sufficientemente grande per cui la direzione del metodo di Newton é sempre definita.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax = b \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, A matrice $m \times n$ con $m < n$ e b vettore in R^m. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. L'insieme ammissibile è compatto.

VERO	FALSO **X**

2. L'insieme ammissibile è sempre regolare.

VERO	FALSO

3. Le condizioni di KKT valgono solo nell'ipotesi di regolarità dell'insieme ammissibile.

VERO	FALSO **X**

4. Il problema può essere risolto con un metodo di penalità interna.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & 0 \leq x \leq M \end{array} \qquad (P)$$

con $x \in R^n$ e $M \in R^n$ con $0 < M < \infty$. Si indichi con x^* la soluzione ottima.

1. I vincoli del problema duale (esclusi gli eventuali vincoli di non negatività delle variabili) sono n tutti di disuguaglianza.

VERO **X**	FALSO

2. Il problema duale ammette soluzione ottima finita $\bar{u} \in R^n$, tale che $\bar{u} \leq \max\{0, c\}$

VERO	FALSO **X**

3. Se $c \geq 0$, allora la soluzione ottima del duale è $\bar{u} = 0$.

VERO	FALSO **X**

4. Il problema primale non è vuoto.

VERO **X**	FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (bianco)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2^o anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4: ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI. Per gli esercizi 5,6,7: ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + 2x_1$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO **X** FALSO

2. Il problema non ammette una soluzione globale.

   VERO **X** FALSO

3. Il problema ammette infinite soluzioni globali.

   VERO FALSO **X**

4. Nel punto $(0,\ -1,\ 0)^T$, la direzione $d = (1,\ 0,\ 1)^T$ risulta essere di salita.

   VERO FALSO **X**

5. Nel punto $(0,\ 0,\ 0)^T$, il metodo del gradiente con ricerca di linea esatta genera il punto $(-1,\ 0,\ 0)^T$.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2(*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1^2 + (x_2+1)^2 \leq 4 \\ & x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. L'insieme ammissibile è regolare.

VERO	FALSO **X**

3. Il punto $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

4. Nel punto di KKT $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ è soddisfatta l'ipotesi di stretta complementarità.

VERO **X**	FALSO

5. Il punto di KKT $x_1 = 1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$ con i moltiplicatori $(0,\ 1/\sqrt{2}, 0)$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 3.(*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 15x_1 + 15x_2 + 15x_3 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2 \\ & 5x_1 - 5x_2 - 5x_3 \geq 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \max \quad & -2u_1 + 2u_2 \\ & 3u_1 + 5u_2 \leq 15 \\ & 3u_1 - 5u_2 \leq 15 \\ & -3u_1 - 5u_2 \leq 15 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**	FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & -2u_1 + 2u_2 \\ & 3u_1 + 5u_2 \leq 15 \\ & 3u_1 - 5u_2 \leq 15 \\ & -3u_1 - 5u_2 \leq 15 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO	FALSO **X**

3. Il punto $(0,\ 0)^T$ è ammissibile per il duale e per la funzione obiettivo del duale si ha $b^T u^* \geq 0$.

VERO **X**	FALSO

4. Il problema duale è illimitato.

VERO **X**	FALSO

5. Il punto $(5,\ 0)^T$ è ottimo per il duale.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Si supponga di avere un problema di ottimizzazione così definito:

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} t_i y_i \\ & \sum_{i=1}^{m} y_i = 1 \\ & \sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} <= a_i y_i, \quad \forall i = 1, \ldots, m \end{array}$$

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param m;
param n;

param c{1..m,1..n};
param a{1..m};
param t{1..m};
param q{1..m,1..n};
var x{1..m,1..n};
var y{1..m};
```

VERO **X**	FALSO

2. La seguente funzione obiettivo è corretta (supponendo che la definizione nel file .mod sia coerente con le specifiche):

```
minimize f: sum{i in 1..m, j in 1..m}c[i,j]*x[i,j]-t[i]*x[i];
```

VERO | FALSO X

3. La seguente scrittura dei vincoli NON è corretta:

```
subject to v1:sum{i in 1..m}y[i] = 1;
subject to v2{i in 1..m}:q[i,j]*x[i,j]<=a[i]*y[i];
```

VERO X | FALSO

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Sia dato il problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} \ f(x) = g(x) + C\|x\|^2$$

con $g : R^n \to R$ funzione due volte continuamente differenziabile, lo scalare $C > 0$ e con $\lambda_{\min}(\nabla^2 g(x)) > -\infty$ dove $\lambda_{\min}(\cdot)$ denota l'autovalore minimo della matrice.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $g(x)$ è coerciva, allora il problema ammette un minimo globale.

   VERO X | FALSO

2. Esiste un valore di C sufficientemente grande per cui la funzione f risulta convessa.

   VERO X | FALSO

3. In un punto x^k, il metodo del gradiente con ricerca di linea é definito da un'iterazione del tipo:

   $$x^{k+1} = x^k - \alpha(\nabla g(x^k) + 2Cx^k)$$

   VERO X | FALSO

4. Esiste un valore di C sufficientemente grande per cui la direzione del metodo di Newton é sempre definita.

   VERO X | FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax = b \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, A matrice $m \times n$ con $m < n$ e b vettore in R^m. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. L'insieme ammissibile è compatto.

   VERO | FALSO X

2. L'insieme ammissibile è sempre regolare.

   VERO | FALSO

3. Le condizioni di KKT valgono solo nell'ipotesi di regolarità dell'insieme ammissibile.

VERO	FALSO **X**

4. Il problema può essere risolto con un metodo di penalità interna.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & 0 \le x \le M \end{array} \qquad (P)$$

con $x \in R^n$ e $M \in R^n$ con $0 < M < \infty$. Si indichi con x^* la soluzione ottima.

1. I vincoli del problema duale (esclusi gli eventuali vincoli di non negatività delle variabili) sono n tutti di disuguaglianza.

VERO **X**	FALSO

2. Il problema duale ammette soluzione ottima finita $\bar{u} \in R^n$, tale che $\bar{u} \ge \max\{0, c\}$.

VERO	FALSO **X**

3. Se $c \le 0$, allora la soluzione ottima del duale è $\bar{u} = 0$.

VERO	FALSO **X**

4. Il problema primale non è vuoto.

VERO **X**	FALSO