

Università degli Studi di Roma “La Sapienza”
Dipartimento di Informatica e Sistemistica “A. Ruberti”

Proff. Gianni Di Pillo and Laura Palagi

**Note per il corso di
OTTIMIZZAZIONE (a.a. 2007-08)**

Dipartimento di Informatica e Sistemistica “A. Ruberti”, via Buonarroti 12 - 00185 Roma.

E-mail: dipillo@dis.uniroma1.it

E-mail: palagi@dis.uniroma1.it

URL: <http://www.dis.uniroma1.it/~or/gestionale/ottimizzazione>

Contents

1	Introduzione	1
1.1	Forme standard e prime definizioni	1
2	Modelli di Programmazione matematica	5
3	Condizioni di esistenza della soluzione	9
3.1	Esercizi sulle condizioni di esistenza	10
4	Forme e funzioni quadratiche	12
5	Soluzione grafica di problemi di ottimizzazione	15
6	Problemi di ottimizzazione convessi	17
7	Le condizioni di ottimalità.	21
7.1	Generalità	21
7.2	Direzioni di discesa	21
7.3	Il caso non vincolato	24
7.4	Esempi sulle condizioni di ottimo non vincolato	26
7.5	Il caso vincolato: preliminari	36
7.6	Il caso vincolato: vincoli di uguaglianza lineari	37
7.7	Il caso vincolato: vincoli di uguaglianza non lineari	43
7.8	Analisi di sensibilità per vincoli di uguaglianza	48
7.9	Il caso vincolato: vincoli di disuguaglianza	52
7.10	Il caso vincolato: vincoli di disuguaglianza e di uguaglianza	55
7.11	Il caso convesso	57
8	La dualità nella Programmazione Lineare	59
9	Generalità sugli algoritmi di ottimizzazione	66
10	Algoritmi per l'ottimizzazione non vincolata	70
10.1	Introduzione	70
10.2	Metodi di ricerca unidimensionale	73
10.2.1	Metodi di ricerca esatta	74
10.2.2	Ricerca di linea esatta nel caso quadratico	74
10.2.3	Metodi di ricerca inesatta: metodo di Armijo	75
10.3	Il metodo del gradiente	76
10.4	Il metodo del gradiente per funzioni quadratiche	77
10.5	Il metodo del gradiente con ricerca di linea	83
10.6	Il metodo del gradiente coniugato	85
10.7	Il metodo delle direzioni coniugate per funzioni quadratiche	85
10.8	Metodo del gradiente coniugato per funzioni quadratiche	89
10.9	Il metodo del gradiente coniugato nel caso non quadratico	92
10.10	Il metodo di Newton	93
10.11	Il metodo di Newton con ricerca di linea	95
A	Richiami sulle norme	99

B	Richiami sulla differenziazione in R^n	101
B.1	Derivate del primo ordine di una funzione reale	101
B.2	Differenziazione di un vettore di funzioni	103
B.3	Derivate del secondo ordine di una funzione reale	104
B.4	Teorema della media e formula di Taylor	105

8 La dualità nella Programmazione Lineare

Il problema di Programmazione Lineare è un problema di ottimizzazione convesso. Inoltre abbiamo affermato che nel caso di vincoli lineari le condizioni necessarie di ottimo valgono anche in assenza dell'ipotesi di regolarità. Quindi vale il risultato enunciato nel Teorema 36.

Le condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità consentono di dedurre alcuni risultati molto importanti nella Teoria della Programmazione Lineare che sono noti sotto il nome di Teoria della Dualità.

Facciamo riferimento per semplicità ad un problema di Programmazione Lineare del tipo

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{78}$$

ove A è una matrice $p \times n$, c è un vettore di dimensione n , b è un vettore di dimensione p . Sappiamo che le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di ottimo globale. Quindi una soluzione del problema (78) esiste se e solo se esistono dei moltiplicatori che soddisfano le condizioni di KKT.

Consideriamo ora il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \max_{u \in \mathbb{R}^p} \quad & b^T u \\ & A^T u \leq c \\ & u \geq 0; \end{aligned} \tag{79}$$

Anche in questo caso le condizioni di KKT sono necessarie e sufficienti di ottimo globale. La coppia di problemi di programmazione lineare (78) e (79) è detta coppia *primale-duale simmetrica*.

Si può dimostrare che le condizioni di KKT dei due problemi di programmazione lineare (78) e (79) sono le stesse. Si tratta del teorema della dualità forte. Il teorema della dualità forte fornisce quindi una relazione tra le soluzioni ottime di questi due problemi.

Teorema 37 (Teorema della Dualità Forte) *Il problema primale (78) ha una soluzione ottima x^* se e solo se il problema duale (79) ha una soluzione ottima u^* ; inoltre i valori delle funzioni obiettivo coincidono all'ottimo $c^T x^* = b^T u^*$.*

Dimostrazione. Si tratta di fare vedere che le condizioni necessarie e sufficienti di ottimo per il problema (78) risultano essere necessarie e sufficienti di ottimo globale u^* per il problema (79).

Chiamiamo con $u \in \mathbb{R}^p$ il moltiplicatore associato ai vincoli $Ax \geq b$, e con $v \in \mathbb{R}^n$ il moltiplicatore associato ai vincoli $x \geq 0$; con queste notazioni, la funzione Lagrangiana del problema (78) è data da:

$$L_p(x, u, v) = c^T x + u^T (b - Ax) - v^T x,$$

e le condizioni di KT affermano l'esistenza di $u^* \geq 0, v^* \geq 0$ tali che:

$$\nabla_x L_p(x^*, u^*, v^*) = c - A^T u^* - v^* = 0, \tag{80}$$

$$u^{*T} (b - Ax^*) = 0 \tag{81}$$

$$v^{*T} x^* = 0 \tag{82}$$

È possibile riscrivere queste condizioni eliminando v^* . Infatti dalla (80) otteniamo $c - A^T u^* = v^*$ ed imponendo la condizione $v^* \geq 0$, si ottiene

$$c - A^T u^* \geq 0.$$

Sostituendo l'espressione della v^* nella (82) otteniamo poi $(c - A^T u^*)^T x^* = 0$, ovvero

$$c^T x^* = u^{*T} A x^*.$$

Sviluppando la (81) si ha anche $u^{*T} b - u^{*T} A x^* = 0$, che insieme alla precedente consente di scrivere

$$u^{*T} b = u^{*T} A x^* = c^T x^*.$$

Possiamo quindi affermare che, x^* è una soluzione del problema (78) se e solo se esiste un moltiplicatore $u^* \in \mathbb{R}^m$ tale che x^* e u^* soddisfano le condizioni:

$$A x^* \geq b, \quad x^* \geq 0, \quad (83)$$

$$A^T u^* \leq c, \quad u^* \geq 0. \quad (84)$$

$$c^T x^* = b^T u^* \quad (85)$$

Osserviamo che alla condizione di ammissibilità di x^* (83), si aggiungono una condizione nella sola u^* data dalla (84) e una condizione che coinvolge sia x^* che u^* . In particolare la condizione (84) evidenzia che $u^* \in \mathbb{R}^m$ è ammissibile per il problema duale (79).

Scriviamo ora le condizioni di KKT per il problema (79). Chiamiamo con $x \in \mathbb{R}^n$ il moltiplicatore associato ai vincoli $A^T u \leq c$, e con $z \in \mathbb{R}^p$ il moltiplicatore associato ai vincoli $u \geq 0$; con queste notazioni, osservando che il problema duale è un problema di massimizzazione, abbiamo per il problema la funzione Lagrangiana:

$$L_d(u, x, z) = -b^T u + x^T (A^T u - c) - z^T u,$$

e se u^* è una soluzione del problema duale, le condizioni di KT affermano l'esistenza di $x^* \geq 0, z^* \geq 0$ tali che:

$$\nabla_u L_d(u^*, x^*, z^*) = -b + A x^* - z^* = 0, \quad (86)$$

$$x^{*T} (A^T u^* - c) = 0 \quad (87)$$

$$z^{*T} u^* = 0 \quad (88)$$

In modo analogo a quanto fatto sul problema primale, possiamo eliminare z^* . Infatti dalla (86) otteniamo $-b + A x^* = z^* \geq 0$; premoltiplicando la (86) per u^{*T} , e tenendo conto delle (87), (88), otteniamo poi $-b^T u^* + c^T x^* = 0$. Possiamo quindi affermare che, se u^* è una soluzione del problema duale, esiste un moltiplicatore x^* tale che u^* e x^* soddisfano le condizioni:

$$A^T u^* \leq c, \quad u^* \geq 0,$$

$$A x^* \geq b \quad x^* \geq 0,$$

$$b^T u^* = c^T x^*.$$

Si constata che le condizioni per il primale (78) e quelle per il duale (79) coincidono. Ricordando che nel caso convesso le condizioni necessarie sono anche sufficienti, possiamo

concludere quanto segue: se il primale ha una soluzione x^* esiste un moltiplicatore u^* che, insieme ad x^* , soddisfa le condizioni necessarie per il primale; ma poichè gli stessi u^* e x^* soddisfano le condizioni sufficienti per il duale, si deduce che il duale ha la soluzione u^* , con moltiplicatore x^* ; viceversa, se il duale ha una soluzione u^* , con associato moltiplicatore x^* , allora x^* è soluzione del primale, con associato moltiplicatore u^* . Inoltre il valore ottimo della funzione obiettivo primale coincide con il valore ottimo della funzione obiettivo duale, come risulta dalla (85). \square

In conclusione, da un punto di vista analitico, risolvere il primale è del tutto equivalente a risolvere il duale. Non è però così da un punto di vista algoritmico, in quanto i due problemi sono diversi, e, a seconda dell'algoritmo che si utilizza, può essere più conveniente risolvere un problema piuttosto che l'altro.

Si può dimostrare anche un altro importante risultato della teoria della dualità che è noto con il nome di *Teorema della Dualità Debole*:

Teorema 38 (Teorema della Dualità Debole) *Siano \bar{x} e \bar{u} soluzioni ammissibile rispettivamente per il problema primale e per il problema duale. Allora risulta $c^T \bar{x} \geq b^T \bar{u}$.*

Dimostrazione. Supponiamo di avere due punti \bar{x} e \bar{u} ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il problema duale, ovvero tali che:

$$\begin{aligned} A^T \bar{u} &\leq c, & \bar{u} &\geq 0, \\ A \bar{x} &\geq b & \bar{x} &\geq 0. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\bar{u}^T (b - A \bar{x}) = \sum_{i=1}^p \bar{u}_j (b_i - a_i^T \bar{x}) \leq 0$ e quindi possiamo scrivere

$$c^T \bar{x} \geq c^T \bar{x} + \bar{u}^T (b - A \bar{x}) = b^T \bar{u} + (c^T - \bar{u}^T A) \bar{x} \geq b^T \bar{u},$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $(c^T - \bar{u}^T A) \bar{x} \geq 0$. \square

Osserviamo che, se x^* è una soluzione ottima per il primale (e quindi in particolare ammissibile), e se \bar{u} è un punto ammissibile per il duale, abbiamo dal teorema della Dualità Debole che

$$c^T x^* \geq b^T \bar{u}.$$

Osserviamo inoltre che, se \bar{x} e x^* sono rispettivamente un punto ammissibile e una soluzione per il primale, si ha ovviamente

$$c^T \bar{x} \geq c^T x^*.$$

Quindi un punto ammissibile per il primale, e un punto ammissibile per il duale forniscono, rispettivamente, una limitazione superiore e una limitazione inferiore per il valore ottimo del primale, cioè

$$b^T \bar{u} \leq c^T x^* \leq c^T \bar{x}.$$

Sapere che il valore ottimo $c^T x^*$ del primale di un problema di Programmazione Lineare si colloca nell'intervallo $[b^T \bar{u}, c^T \bar{x}]$, ove \bar{x} è un qualunque punto ammissibile per il primale, e \bar{u} è un qualunque punto ammissibile per il duale, risulta di grande utilità dal punto di vista algoritmico.

Naturalmente si può dare un risultato analogo per la soluzione ottima del duale u^* . In particolare se \bar{x} e \bar{u} soluzioni ammissibile rispettivamente per il problema primale e per il problema duale, possiamo scrivere

$$b^T \bar{u} \leq b^T u^* \leq c^T \bar{x}.$$

Fino ad ora abbiamo fatto riferimento ad una coppia primale -duale simmetrica. Si possono dare delle regole generali per scrivere il problema duale di un qualunque problema di programmazione lineare. Tali regole sono schematizzate nella tabella, in cui, data una matrice A , indichiamo con a_i^T le righe di A e con A_j le colonne di A .

PRIMALE	DUALE
$\min c^T x$ $a_i^T x \geq b_i$ $a_i^T x = b_i$ $x_j \geq 0$ x_j non vincolata in segno	$\max b^T u$ $u_i \geq 0$ u_i non vincolata in segno $u^T A_j \leq c_j$ $u^T A_j = c_j$
DUALE	PRIMALE

Osservazione 7 Osserviamo che il ruolo di primale e di duale sono intercambiabili. Inoltre facendo il duale del problema duale si riottiene il problema primale.

Osservazione 8 Nel derivare i risultati della Teoria della dualità abbiamo fatto riferimento alla coppia prima -duale simmetrica. Questi risultati sono validi comunque si scelga una coppia primale-duale, facendo attenzione al segno delle disuguaglianze, in particolare nel teorema della dualità debole, che sono date facendo riferimento ad un problema primale di minimizzazione ed uno duale di massimizzazione.

Nella successiva tabella riportiamo le situazioni che si possono verificare (Sì) e quelle che non si possono verificare (No) in una coppia primale-duale:

		DUALE		
		ottimo finito	illimitato superior.	ins. ammissibile vuoto
PRIMALE	ottimo finito	Sì	No	No
	illimitato inferior.	No	No	Sì
	ins. ammissibile vuoto	No	Sì	Sì

Esempio 13 Sia dato il problema di Programmazione Lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq -3 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Scrivere il problema duale;
2. dare una limitazione superiore ed inferiore al valore ottimo $c^T x^*$ del problema primale;
3. dare una limitazione superiore ed inferiore al valore ottimo $b^T u^*$ del problema duale;
4. utilizzando il teorema della dualità forte (o le equivalenti condizioni di KKT) dire se il punto $x^* = (4, 1)^T$ è ottimo per il primale e fornire a certificato il valore ottimo della soluzione duale u^* .

Il problema duale è (attenzione per applicare le regole della tabella è necessario che i problemi siano scritti in una delle forme previste):

$$\begin{aligned} \max \quad & 3u_1 - 5u_2 \\ & u_1 - u_2 \leq 1 \\ & -u_1 - u_2 \leq -2 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che il punto $\bar{x} = (3, 0)^T$ è ammissibile per il primale, mentre il punto $\bar{u} = (0, 2)^T$ è ammissibile per il duale. Si ottengono quindi i due intervalli

$$\begin{aligned} -10 = b^T \bar{u} &\leq c^T x^* \leq c^T \bar{x} = 3 \\ -10 = b^T \bar{u} &\leq b^T u^* \leq c^T \bar{x} = 3. \end{aligned}$$

Le condizioni di KKT (equivalenti al teorema della dualità forte, si scrivono;

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq -3 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\ u_1 - u_2 &\leq 1 \\ -u_1 - u_2 &\leq -2 \\ u_1 &\geq 0, \quad u_2 \geq 0 \\ x_1(u_1 - u_2 - 1) &= 0 \\ x_2(-u_1 - u_2 + 2) &= 0 \\ u_1(-x_1 + x_2 + 3) &= 0 \\ u_2(x_1 + x_2 - 5) &= 0 \end{aligned}$$

Il punto x^* è ammissibile per il primale. Dalle condizioni di complementarità segue anche che per essere ottimo deve esistere un $u^* \geq 0$ tale che $u_1^* - u_2^* - 1 = 0$ e $-u_1^* - u_2^* + 2 = 0$, da cui si ottiene $u^* = (3/2, 1/2)$.