3 Condizioni di esistenza della soluzione

Stabilire l'esistenza di soluzioni di un problema di ottimo, a partire dalla caratterizzazione analitica della funzione obiettivo e dell'insieme ammissibile può essere, in generale, difficile. Una semplice condizione *sufficiente* (ma non necessaria) per l'esistenza di un punto di minimo globale in un problema di ottimo in cui lo spazio delle variabili sia $\mathbb{R}^n$ è quella riportata nel teorema di Teorema di Weierstrass.

Teorema 1 (Teorema di Weierstrass) *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto. Allora esiste un punto di minimo globale di f in $\mathcal{F}$.*

Il risultato stabilito nel Teorema 1 si applica in modo diretto solamente a problemi *vincolati* in cui l'insieme ammissibile $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto ovvero è chiuso e limitato.
Osserviamo che il teorema dà una condizione *sufficiente* di esistenza, ma non *necessaria*: ad esempio, il semplice problema

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x\in\mathbb{R}} & x^2 \\ & x \geq 0, \end{array}$$

ha la soluzione globale $x^* = 0$, anche se l'insieme ammissibile, costituito da tutto il semiasse $x \geq 0$ è chiuso, ma non limitato; analogamente, il problema:

$$\begin{array}{rl} \min\limits_{x\in\mathbb{R}} & x^2 \\ -1 < & x < 1, \end{array}$$

ha la soluzione globale $x^* = 0$ anche se l'insieme ammissibile è costituto dall'intervallo $(-1, 1)$, limitato ma non chiuso.

Notiamo che se la funzione $g_i(x)$ è continua, l'insieme dei punti che soddisfano il vincolo $g_i(x) \leq 0$ è un insieme chiuso (e quindi, se $h_j(x)$ è continua, anche l'insieme dei punti che soddisfano il vincolo $h_j(x) = 0$ è chiuso). Pertanto nei casi che prenderemo in considerazione la chiusura di S è sempre assicurata. Pertanto, l'applicazione del Teorema di Weierstrass al Problema (3) si riconduce alla verifica che l'insieme ammissibile $\mathcal{F}$ sia limitato. Ciò è sicuramente vero se tutte le variabili x_i sono limitate da valori finiti sia inferiormente che superiormente, come in pratica accade sempre nei problemi dell'Ingegneria Gestionale.

Nel caso non vincolato tuttavia, in cui $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$ non è possibile applicare direttamente il teorema di Weierstrass. Allo scopo di definire condizioni sufficienti di esistenza per il problem (2), si definisce l'*insieme di livello* $\mathcal{L}_{x^0}$ della funzione obiettivo $f(x)$ relativo ad un punto x^0 come l'insieme dei punti in cui la funzione ha valore minore o eguale a quello di $f(x^0)$:

$$\mathcal{L}_{x^0} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x^0)\}.$$

Possiamo concludere che il Problema (2) ha sicuramente una soluzione globale se per qualche x^0 l'insieme di livello $\mathcal{L}_{x^0}$ risulta compatto: infatti, in questo caso, $f(x)$ ha un minimo globale x^* in $\mathcal{L}_{x^0}$, ed al di fuori di $\mathcal{L}_{x^0}$ risulta sicuramente $f(x) > f(x^0) \geq f(x^*)$.

Una funzione $f(x)$ si dice *radialmente illimitata*, o, anche, *coerciva*, se gode della proprietà di tendere a $+\infty$ quando ci si allontana dall'origine in $\mathbb{R}^n$: cioè se risulta:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Si può dimostrare che, se $f(x)$ è radialmente illimitata i suoi insiemi di livello sono compatti per ogni valore di x^0, e quindi una funzione radialmente illimitata ha un punto di minimo globale in $\mathbb{R}^n$.

La coercività di f è quindi una condizione solo sufficiente di esistenza di un punto di minimo globale di f come illustrato in Figura 1 in cui è rappresentata una funzione non coerciva che ammette un minimo globale.

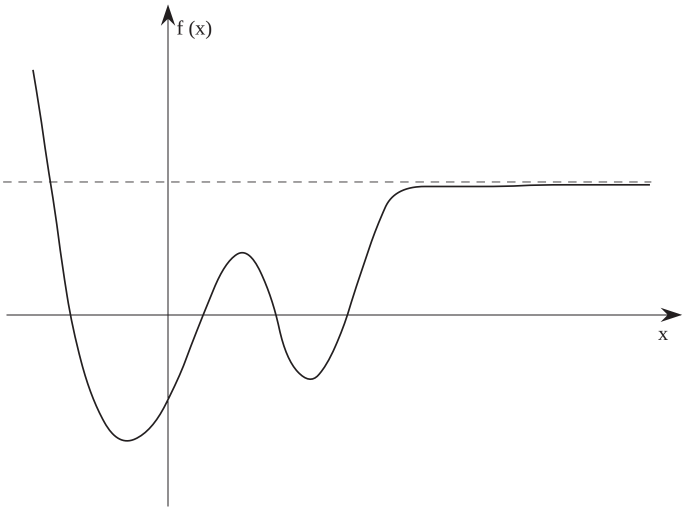

Figure 1: Esempio di funzione non coerciva con un minimo globale.

Più in generale, nell'applicazione del Teorema 1, possiamo limitarci a prendere in considerazione i punti di $\mathcal{F}$ nell'insieme $\mathcal{L}_{x^0}$, ossia i punti di $\mathcal{F}$ in cui la funzione obiettivo abbia valore non superiore a quello assunto nel punto x^0. Vale quindi il risultato seguente.

Teorema 2 (Condizione sufficiente di esistenza) *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso e non vuoto. Supponiamo che esista $x^0 \in \mathcal{F}$ tale che l'insieme di livello*

$$\mathcal{L}_{x^0} = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq f(x^0)\}$$

sia limitato. Allora esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$.

Dim. Poiché $\mathcal{F}$ è chiuso e f è continua, l'insieme $\mathcal{L}_{x^0}$ è chiuso e quindi, per l'ipotesi fatta, è anche compatto. Per il Teorema 1 esiste allora un punto di minimo $x^\star$ di f su $\mathcal{L}_{x^0}$ a cui corrisponde il valore minimo $f(x^\star) \leq f(x^0)$. D'altra parte, se $x \in \mathcal{F}$ non appartiene a $\mathcal{L}_{x^0}$ ciò implica, per definizione di insieme di livello che sia $f(x) > f(x^0) \geq f(x^\star)$ e ciò implica che $x^\star$ è un punto di minimo globale su tutto $\mathcal{F}$. □

Domande

1) Si supponga che nel Problema (3) l'insieme ammissibile sia chiuso ma non limitato, e la funzione obiettivo sia radialmente illimitata. Cosa si può dire sull'esistenza della soluzione?

3.1 Esercizi sulle condizioni di esistenza

Studiamo l'esistenza del minimo di alcune funzioni.

Esempio 2 *La semplice funzione quadratica:*

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \|x\|^2$$

è evidentemente radialmente illimitata, e il suo minimo globale è nel punto $x_i^* = 0, i = 1\ldots,n$.

Esempio 3 *Sia data la funzione*

$$f(x_1, x_2) = {x_1}^4 + {x_2}^4 - 3x_1x_2.$$

Studiare l'esistenza di punti di minimo.

Soluzione. La funzione é coerciva. Infatti possiamo scrivere

$$f(x_1, x_2) = ({x_1}^4 + {x_2}^4)\left(1 - \frac{3x_1x_2}{{x_1}^4 + {x_2}^4}\right)$$

risulta, comunque presa una successione x^k, tale che $\|x^k\| \to \infty$

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{3x_1x_2}{x_1^4 + x_2^4} = 0$$

Si ha quindi, quindi $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x_1, x_2) = \infty$ e la funzione è coerciva.
Poichè la funzione è anche continua ammette almeno un minimo globale.

Esempio 4 *Sia data la funzione*

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - 12x_1x_2 + 8x_2^3.$$

Dire se esiste un minimo globale.

Soluzione. La funzione non é coerciva. Infatti lungo la direzione definita da $x_2 = \bar{x}_2$ =cost. risulta

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x_1 \to = -\infty}} f(x_1, \bar{x}_2) = -\infty.$$

In particolare, poiché esiste una direzione lungo cui la funzione è illimitata inferiormente, possiamo concludere anche che non esiste un punto di minimo globale.