

1 Introduzione

1.1 Forme standard e prime definizioni

Come messo in luce nel corso di *Ricerca Operativa*, molti problemi dell'Ingegneria Gestionale assumono la forma di un problema di *Ottimizzazione*. Un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare il valore di un vettore di *variabili di decisione* $x \in \mathbb{R}^n$ che minimizza una *funzione obiettivo* $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, quando x è vincolato ad appartenere ad un *insieme ammissibile* $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$; cioè' consiste nel problema:

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x). \quad (1)$$

Osserviamo subito che un problema di massimo si può sempre ricondurre a un problema di minimo, cambiando di segno la funzione obiettivo. Infatti, i punti di massimo (ove esistano) del problema

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

coincidono con i punti di minimo del problema

$$\min_{x \in \mathcal{F}} -f(x)$$

e risulta: $\max_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\min_{x \in \mathcal{F}} (-f(x))$.

In base a tale osservazione ci si può riferire esclusivamente, senza perdita di generalità, a problemi di minimizzazione.

Riportiamo la prima definizione utile.

Definizione 1 (Punto di minimo globale) *Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di minimo globale (o assoluto) di f su \mathcal{F} se risulta:*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F},$$

e, in tal caso, si dice che $f(x^)$ è il minimo (o il valore minimo) globale di f su \mathcal{F} , ossia*

$$f(x^*) = \min_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

Si dice che $x^ \in \mathcal{F}$ è un punto di minimo globale stretto di f su S se risulta:*

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, x \neq x^*. \quad \square$$

È opportuno mettere in evidenza che, assegnati \mathcal{F} e $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ potrebbero anche non esistere soluzioni ottime. Una prima possibilità è che l'insieme ammissibile \mathcal{F} sia vuoto; in tal caso non esistono *punti ammissibili* e di conseguenza non esistono soluzioni ottime.

Se \mathcal{F} è non vuoto, possono verificarsi, nel caso generale, le situazioni seguenti:

- la funzione obiettivo è illimitata inferiormente su \mathcal{F} ossia:

$$\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\infty$$

e, in tal caso, non esiste un valore minimo di f su \mathcal{F} ;

- la funzione obiettivo è limitata inferiormente su \mathcal{F} ossia:

$$\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) > -\infty,$$

ma tuttavia *non esistono punti di minimo globale* di f su \mathcal{F} ;

- esistono punti di minimo globale di f su \mathcal{F} ; in tal caso la funzione obiettivo è necessariamente limitata inferiormente su \mathcal{F} e si ha

$$\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = \min_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

Solo nell'ultimo caso, ovviamente, ci si può porre il problema della ricerca di una soluzione ottima.

“Risolvere” un problema di ottimizzazione può quindi significare, in pratica:

- stabilire se l'insieme ammissibile è non vuoto, oppure concludere che non esistono soluzioni ammissibili;
- stabilire se esistono soluzioni ottime, oppure dimostrare che il problema non ammette soluzioni ottime;
- determinare (eventualmente in modo approssimato) una soluzione ottima.

Due casi sono di particolare interesse: - l'insieme ammissibile \mathcal{F} coincide con \mathbb{R}^n , cosicchè il Problema (1) diviene:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x); \tag{2}$$

in questo caso si dice che il Problema (1) è *non vincolato*. Più in generale, il Problema (1) è non vincolato se \mathcal{F} è un insieme aperto in \mathbb{R}^n . Le condizioni di ottimalità per il Problema (2) considerate nel seguito, non cambiano se \mathcal{F} è un aperto; quindi in queste note, per semplicità assumiamo che $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$.

- l'insieme ammissibile è descritto da *vincoli di disuguaglianza e/o vincoli di uguaglianza* sulle variabili di decisione:

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, p; h_j(x) = 0, j = 1, \dots, m\};$$

in questo caso il Problema (1) diviene:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. In questo caso diciamo che il Problema (1) è *vincolato*.

I problemi di Ottimizzazione vengono anche chiamati problemi di *Programmazione Matematica* quando si vuole mettere l'enfasi sui metodi risolutivi dei problemi stessi.

Nel corso di Ricerca Operativa è stato esemplificato il caso della Programmazione Lineare, che corrisponde al caso in cui tutte le funzioni $f, g_i, i = 1, \dots, p, h_j, j = 1, \dots, m$ del Problema (3) sono combinazioni lineari delle variabili di decisione, sono cioè funzioni della forma:

$$v(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n,$$

ove $c_i, i = 1, \dots, n$ sono coefficienti.

Notiamo che un problema di Programmazione Lineare è necessariamente vincolato, poiché altrimenti si tratterebbe sempre di un problema illimitato.

Si dice che il Problema (1) è un problema di *Programmazione Nonlineare* (PNL) se almeno una, tra le funzioni $f, g_i, i = 1, \dots, p, h_j, j = 1, \dots, m$, del Problema (2) o del Problema (3) risulta essere non lineare, rispetto ad almeno una delle componenti del vettore delle variabili di decisione x .

Per il problema vincolato (3) si assume usualmente che il numero m di vincoli di uguaglianza non sia maggiore del numero n di variabili di decisione, cioè si assume $m \leq n$. Altrimenti, dovendo le n variabili soddisfare m equazioni, l'insieme ammissibile potrebbe risultare vuoto, a meno che alcuni vincoli non siano tra di loro dipendenti, e quindi ridondanti. Una limitazione analoga non vale invece per i vincoli di disuguaglianza.

A volte, tra i vincoli di disuguaglianza, si mettono in esplicita evidenza i *vincoli semplici* sulle variabili, vincoli che esprimono limitazioni sul valore minimo m_i e massimo M_i che una variabile x_i può assumere. In questo caso, il Problema (3) diviene:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \\ & m \leq x \leq M. \end{aligned} \tag{4}$$

Se nel Problema (4) la variabile x_i non è limitata inferiormente (superiormente), si assume per convenzione che $m_i = -\infty$ ($M_i = +\infty$).

In generale, in problemi di PNL la ricerca di soluzioni globali può risultare difficile, e può avere interesse anche la ricerca di soluzioni di tipo "locale". Per poter definire il concetto di "punto di minimo locale" occorre introdurre il concetto di *intorno sferico aperto* \mathcal{S} di un punto. In particolare dato x^* , un intorno sferico aperto \mathcal{S} di centro x^* e raggio $\rho > 0$ è definito come

$$\mathcal{S}(x^*, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \rho\}.$$

Possiamo allora introdurre la seguente definizione

Definizione 2 (Punto di minimo locale) *Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ si dice punto di minimo locale (o relativo) di f su \mathcal{F} se esiste un intorno $\mathcal{S}(x^*, \rho)$ di x^* tale che:*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{S}(x^*, \rho),$$

e, in tal caso, si dice che $f(x^)$ è un minimo locale di f su S .*

Si dice che $x^ \in S$ è un punto di minimo locale stretto di f su S se esiste un intorno $\mathcal{S}(x^*, \rho)$ di x^* tale che:*

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{S}(x^*, \rho), x \neq x^*. \quad \square$$

È immediato rendersi conto del fatto che *un punto di minimo globale è anche un punto di minimo locale*. Notiamo anche che nella definizione precedente l'intorno $\mathcal{S}(x^*, \rho)$ preso in considerazione *non è necessariamente tutto contenuto* in S . Nel caso particolare in cui \mathcal{F} abbia un interno non vuoto ed esista $\mathcal{S}(x^*, \rho) \subseteq \mathcal{F}$, tale che $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathcal{S}(x^*, \rho)$, diremo che x^* è un punto di minimo locale *non vincolato* di f su S .

In queste note assumiamo che le funzioni del problema f, g, h siano almeno continuamente differenziabili in \mathbb{R}^n ; quando richiesto, assumiamo che siano almeno due volte continuamente differenziabili.

Nel seguito diremo che un problema di ottimizzazione è scritto in *forma standard* se è scritto nella forma (2) nel caso non vincolato, nella forma (3) nel caso vincolato.

Domande

- 1) Come si mette in forma standard un problema non vincolato in cui la funzione obiettivo è da massimizzare?
- 2) Ogni problema con vincoli di disuguaglianza e uguaglianza può essere trasformato in un problema con soli vincoli di disuguaglianza. Come?
- 3) Ogni problema con vincoli di disuguaglianza e uguaglianza può essere trasformato in un problema con soli vincoli di uguaglianza. Come?