

2 Modelli di Programmazione matematica

Esempio 1 (Discriminazione del prezzo)

Consideriamo un monopolista che operi su due mercati distinti (ad es. nazionale ed estero) ciascuno con una diversa funzione di domanda. Indichiamo con x_i l'offerta sul mercato $i = 1, 2$ e con $P_i = f_i(x_i)$ la funzione di domanda inversa sul mercato i . Il ricavo derivante dalla vendita di x_i unità di prodotto sul mercato i è $x_i f_i(x_i)$. Supponiamo inoltre che il costo unitario di produzione dipenda solo dal prodotto finale e non dal mercato e sia pari a c . Il problema consiste nel massimizzare il profitto del monopolista. La funzione ricavo è

$$x_1 f_1(x_1) + x_2 f_2(x_2),$$

mentre il costo è $c(x_1 + x_2)$. Il profitto totale sarà quindi

$$f(x) = x_1 f_1(x_1) + x_2 f_2(x_2) - c(x_1 + x_2).$$

Naturalmente possono essere presenti vincoli definiti dal processo di produzione del bene e dal mercato su cui il bene viene immesso. Questi vincoli sono specifici del processo di produzione e del mercato e non entriamo qui nel dettaglio. Li indicheremo semplicemente con $x \in S$. Posto $n = 2$ e $x = (x_1, \dots, x_n)'$ si ha l'insieme ammissibile:

$$\mathcal{F} = \{x \in S : x \geq 0\}.$$

Più in generale nel caso di n mercati distinti, il problema di ottimizzazione corrispondente è

$$\max_{x \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^n x_i f_i(x_i) - c \sum_{i=1}^n x_i$$

Molto spesso le funzioni $f_i(x_i)$ hanno un andamento lineare del tipo

$$f_i(x_i) = a_i - m_i x_i \quad \text{con } m_i > 0.$$

La funzione ricavo risulta essere quindi una funzione quadratica del tipo

$$\sum_{i=1}^n x_i (a_i - m_i x_i) = -\frac{1}{2} x' Q x + a' x$$

con Q matrice diagonale definita positiva con elementi diagonali $2m_i > 0$ e $a = (a_1 \dots, a_n)'$. Il problema di discriminazione del prezzo diventa un problema di programmazione quadratica del tipo

$$\max_{x \in \mathcal{F}} -\frac{1}{2} x' Q x + (a + c)' x$$

Esempio 1 (Problemi di approssimazione ai Minimi quadrati)

Supponiamo che siano noti n punti del piano (x_i, y_i) con $i = 1, \dots, n$ che possono corrispondere ai valori una funzione continua $\phi : R \rightarrow R$ ottenuti per via sperimentali o con misurazioni.

Si vuole approssimare la funzione $y = \phi(x)$ per mezzo di un polinomio di primo grado (ovvero una retta) del tipo $y = mx + q$.

Si definiscono gli errori

$$e_i(x_i) = y_i - (mx_i + q), \quad i = 1, \dots, n,$$

e si può considerare il problema di ottimizzazione non vincolata, (noto anche come problema di *curve fitting*)

$$\min \|e(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n e_i(x_i)^2 = \sum_{i=1}^n (mx_i + q - y_i)^2$$

Si osservi che la funzione obiettivo è quadratica.

Più in generale, si può considerare il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \|e(x)\|^\alpha, \\ e \in & R^n \end{aligned}$$

in cui $\|\cdot\|$ è una norma su R^n e $\alpha > 0$. I casi più comuni sono quelli in cui si richiede di minimizzare una norma ℓ_p con $p \geq 1$, o, equivalentemente, la p -ma potenza di una norma ℓ_p :

$$f(x) = \sum_{i=1}^m |e_i(x)|^p,$$

oppure la norma ℓ_∞ :

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} |e_i(x)|.$$

Problemi differenti si ottengono ovviamente in corrispondenza ad altre scelte delle funzioni approssimanti che, nel caso più generale, possono dipendere in modo non lineare dai parametri incogniti.

Esercizio 1 *Un'industria chimica intende utilizzare della lamiera metallica residua, costruendo un serbatoio scoperto da adibire all'immagazzinamento di un prodotto liquido. La lamiera può essere tagliata e saldata a piacere, è disponibile per complessivi 150m^2 e la si vuole utilizzare tutta. Il serbatoio deve essere contenuto in un capannone a pianta quadrata, con lato di 10m , e con tetto spiovente dall'altezza di 4.5 all'altezza di 3m . Per semplicità di progetto, si assume che il serbatoio abbia la forma di un prisma retto, con base quadrata.*

Determiniamo le dimensioni del serbatoio, in modo da massimizzare il volume del liquido che vi può essere contenuto.

Soluzione. Le variabili di decisione sono x_1 la misura del lato di base del serbatoio e x_2 la misura dell'altezza. Il volume del serbatoio è

$$V = A_b \cdot h = x_1^2 x_2.$$

Per quanto riguarda i vincoli abbiamo:

vincoli di disponibilità: deve essere usata esattamente una quantità di lamiera pari a 150 mq. Quindi, poichè il serbatoio è scoperto la quantità di lamiera necessaria è pari all'area di base A_b e alle 4 superfici laterali. Quindi $A_b + 4A_l = 150$ che corrisponde a

$$x_1^2 + 4x_1 x_2 = 150.$$

Vincoli di spazio: il serbatoio deve essere collocato nel capannone, quindi

$$x_1 \leq 10;$$

per quanto riguarda x_2 , poiché l'altezza del capannone è variabile da 4.5 a 3 metri e il lato è 10 m. abbiamo

$$x_2 \leq -0.15x_1 + 4.5.$$

Vincoli di non negatività: si tratta di lunghezze e quindi

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Complessivamente possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1^2 x_2 \\ & x_1^2 + 4x_1 x_2 = 150 \\ & x_1 \leq 10 \\ & x_2 + 0.15x_1 \leq 4.5 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che l'insieme ammissibile è compatto. Infatti $0 \leq x_1 \leq 10$ e $0 \leq x_2 \leq 4.5 - 0.15x_1 \leq 4.5$. La funzione è continua ovunque, quindi esiste un punto di minimo globale.

Esercizio 2 *Un'industria dolciaria si rifornisce di zucchero acquistandolo in tre diversi paesi produttori, che indicheremo con A, B, C . I prezzi di acquisto dello zucchero nei tre paesi sono diversi, e, in ciascuno dei tre paesi, il prezzo subisce delle variazioni aleatorie, dovute alle variazioni dei cambi, alla maggiore o minore produzione stagionale, alle variazioni salariali ecc.. Per tener conto di queste variazioni aleatorie i prezzi per tonnellata sono caratterizzati mediante i valori medi p_A, p_B, p_C , e le varianze $\sigma^2_A, \sigma^2_B, \sigma^2_C$. Ovviamente se i prezzi non subissero variazioni aleatorie, converrebbe acquistare tutta la materia prima del paese che offre il prezzo minore. In presenza delle incertezze sui prezzi, l'industria deve fare riferimento, nella propria programmazione degli acquisti, ad un prezzo medio stimato p_M , e acquista lo zucchero nei tre paesi secondo proporzioni tali da realizzare questo prezzo medio stimato. Indicando con x_1, x_2, x_3 le variabili che rappresentano, per ogni tonnellata di zucchero, le frazioni acquistate rispettivamente nei paesi A, B, C deve risultare:*

$$\begin{aligned} x_1 p_A + x_2 p_B + x_3 p_C &= p_M \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1; \end{aligned}$$

il primo vincolo infatti esprime il fatto che il prezzo medio stimato dello zucchero sia pari p_M per ogni tonnellata, e il secondo vincolo esprime il fatto che le variabili di decisioni sono frazioni di una quantità unitaria (la tonnellata).

Come obiettivo della programmazione degli acquisti, l'industria assume quello di minimizzare il rischio che il prezzo medio effettivo per tonnellata risultante dagli acquisti effettuati secondo le frazioni x_1, x_2, x_3 , differisca da quello stimato p_M ; ciò per rendere il più possibile certe, in termini di costi di produzione, le conseguenze della programmazione degli acquisti. Una ovvia misura di questo rischio è data dalla varianza del prezzo medio σ^2_M , quantità data in questo caso dalla espressione

$$\sigma^2_M = x_1^2 \sigma^2_A + x_2^2 \sigma^2_B + x_3^2 \sigma^2_C.$$

Assumiamo che, nell'unità monetaria adottata risulti:

$$\begin{aligned} p_A &= 4, & p_B &= 5.5 & p_C &= 6 \\ \sigma_A^2 &= 1, & \sigma_B^2 &= 0.8, & \sigma_C^2 &= 0.5 \end{aligned}$$

e che l'industria abbia programmato sulla base di un prezzo medio $P_M = 5$.

Soluzione. Si tratta di un problema di programmazione quadratica

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + 0.8x_2^2 + 0.5x_3^2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 4x_1 + 5.5x_2 + 6x_3 = 5 \end{aligned}$$

Esercizio 3 Una compagnia petrolifera si rifornisce di greggio in tre città portuali, che indicheremo con A, B, C . Il porto B è ubicato 300Km a est e 400Km a nord del porto A , e il porto C è ubicato 400Km ad est e 100Km a sud del porto B . La compagnia intende costruire una nuova raffineria per il greggio, e intende localizzare la nuova raffineria in modo da minimizzare la quantità totale di tubi occorrenti per collegare la raffineria ai porti. Determiniamo la formulazione di questo problema di localizzazione.

Supponiamo inoltre che non sia possibile situare la raffineria né a sud del porto A , né entro un raggio di 360 Km. dallo stesso.

Soluzione. Scegliamo un sistema di riferimento con il porto A nell'origine. Il porto B ha quindi coordinate $(300,400)$, mentre il porto C $(700,300)$. La raffineria si trova nella posizione incognita (x_1, x_2) e l'obiettivo è minimizzare la distanza, cioè

$$\min (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} + ((x_1 - 300)^2 + (x_2 - 400)^2)^{1/2} + ((x_1 - 700)^2 + (x_2 - 300)^2)^{1/2}$$

Inoltre abbiamo i vincoli sulle coordinate della raffineria:

$$\begin{aligned} x_2 &\geq 0 \\ x_1^2 + x_2^2 &\geq 360^2 \end{aligned}$$