7.9 Il caso vincolato: vincoli di disuguaglianza

Il problema con vincoli di disuguaglianza:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p, \end{array} \tag{51}$$

o, in forma vettoriale:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ & g(x) \leq 0, \end{array} \tag{52}$$

può essere trattato basandosi largamente su quanto detto nei due paragrafi precedenti.

La funzione Lagrangiana per il Problema (51) è data da:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x),$$

o, in forma vettoriale,

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T g(x).$$

Sia x^* una soluzione locale del problema, e sia g_i un vincolo non attivo in x^*, cosicchè risulti $g_i(x^*) < 0$. Consideriamo il punto $x^* + \alpha d$ ottenuto spostandosi da x^* lungo una qualsiasi direzione $d \in \mathbb{R}^n$ di una quantità $\alpha > 0$; per α sufficientemente piccolo risulterà ancora $g_i(x^* + \alpha d) < 0$, e quindi per ogni vincolo non attivo, nel punto x^* qualunque direzione $d \in \mathbb{R}^n$ risulta ammissibile. In particolare, se tutti i vincoli fossero non attivi in x^*, a partire da x^* ci si potrebbe spostare in qualunque direzione senza violare nessun vincolo, e quindi le condizioni necessarie di ottimalità per x^* sarebbero le stesse del caso non vincolato.

Possiamo concludere che se x^* è una soluzione locale del Problema (51), è una soluzione locale anche del problema che si ottiene dal Problema (51) eliminando tutti i vincoli non attivi in x^*, e cioè del problema:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i \in I_a(x^*), \end{array} \tag{53}$$

ove $I_a(x^*) = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x^*) = 0\}$ denota l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x^*.

D'altra parte, in una soluzione locale, i vincoli di disuguaglianza attivi possono essere trattati come vincoli di uguaglianza; pertanto se x^* è una soluzione locale del Problema (53), è una soluzione locale anche per il Problema:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ & g_i(x) = 0, \quad i \in I_a(x^*), \end{array} \tag{54}$$

che è un problema con soli vincoli di uguaglianza. Perciò, ricordando la Proposizione 24, possiamo affermare che, se x^* è un punto di regolarità, esistono moltiplicatori $\lambda_i, i \in I_a(x^*)$, tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i \in I_a(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0. \tag{55}$$

Assumiamo ora:

$$\lambda_i^* = 0 \text{ per ogni } i : g_i(x^*) < 0,$$

e cioè assegniamo un valore nullo ai moltiplicatori associati ai vincoli non attivi in x^*; questa condizione può essere espressa ponendo $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0,\ i \notin I_a(x^*)$. Osserviamo poi che anche per i vincoli attivi risulta $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$; possiamo allora riscrivere la (55) nella forma:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) &+ \sum_{i \in I_a(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i \notin I_a(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) \\ = \nabla f(x^*) &+ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0, \end{aligned} \tag{56}$$

con la condizione che

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0,\ i = 1, \ldots, p.$$

Una importante proprietà dei moltiplicatori λ_i^* associati ai vincoli di disuguaglianza, proprietà non ancora messa in evidenza, è che devono essere tutti non negativi; deve cioè risultare:

$$\lambda_i^* \geq 0,\ i = 1, \ldots, p. \tag{57}$$

Giustifichiamo questa proprietà utilizzando l'analisi di sensibilità effettuata in precedenza. Supponiamo di avere nel Problema (51) il solo vincolo $g(x) \leq 0$, con $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{58}$$

sia x^* una soluzione locale, e sia λ^* il moltiplicatore che soddisfa, con x^*, le condizioni:

$$\nabla f(x^*) + \lambda^* \nabla g(x^*) = 0,$$

$$\lambda^* g(x^*) = 0.$$

Se in x^* il vincolo non è attivo, già abbiamo $\lambda^* = 0$. Se il vincolo è attivo, per quanto detto in precedenza, x^*, λ^* sono anche soluzione e moltiplicatore per il problema:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & g(x) = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Se modifichiamo il Problema (58) introducendo una variazione $\epsilon > 0$ nel secondo membro del vincolo, otteniamo il problema:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & g(x) \leq \epsilon, \end{aligned} \tag{60}$$

il cui insieme ammissibile $\mathcal{F}(\epsilon) = \{x : g(x) \leq \epsilon\}$ per $\epsilon > 0$, contiene l'insieme ammissibile del Problema (59) $\mathcal{F} = \{x : g(x) = 0\}$. Se $x^*(\epsilon)$ è la soluzione locale del Problema (60) che si ottiene per piccoli valori di ϵ, dovrà risultare $f(x^*(\epsilon)) \leq f(x^*)$, in quanto la minimizzazione di f è effettuata su un insieme più grande. Si ha quindi, tenendo conto della (50), scritta con λ^* al posto di μ^*:

$$0 \geq \frac{f(x^*(\epsilon)) - f(x^*)}{\epsilon} \simeq -\lambda^*,$$

che implica appunto $\lambda^* \geq 0$.

Abbiamo così in pratica dimostrato la proposizione seguente.

Teorema 28 *Sia x^* un punto di regolarità per i vincoli del Problema (51). Condizione necessaria affinchè x^* sia una soluzione locale del problema è che esista un vettore di moltiplicatori λ^*, con componenti $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots \lambda_p^*$, tale che:*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) &= 0, &(61)\\ \lambda_i^* &\geq 0,\ i = 1, \dots, p &(62)\\ \lambda_i^* g_i(x^*) &= 0,\ i = 1, \dots, p &(63) \end{aligned}$$

o, in forma matriciale:

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda^* = 0, &\quad (64)\\ \lambda^* \geq 0, &\quad (65)\\ {\lambda^*}^T g(x^*) = 0. &\quad (66) \end{aligned}$$

Le condizioni necessarie di ottimalità della proposizione precedente sono note come *condizioni di Kuhn-Tucker* (o anche, di *Karush-Kuhn-Tucker*). Un punto x^* viene detto *punto di Kuhn-Tucker*, o sinteticamente punto di KT, se esiste un moltiplicatore λ^* tale che x^*, λ^* soddisfano le condizioni.

La condizione (63) viene chiamata *condizione di complementarità*; notiamo che la (63) implica la (66), mentre il viceversa è vero solo tenendo conto anche della (65) e del fatto che $g(x^*) \leq 0$.

Si dice inoltre che un punto di KKT x^* soddisfa la condizione di **stretta complementarità** se risulta $\lambda_i^* > 0$ per ogni $i: \ g_i(x^*) = 0$.

La condizione necessaria $\nabla_x L(x^*, \mu^*) = 0$, e quella di complementarità $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0,\ i = 1, \dots, p$ danno luogo ad un sistema di $n + p$ equazioni nelle $n + p$ incognite x, λ:

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \lambda) &= 0,\\ \lambda_i g_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Tra le soluzioni $\bar{x}, \bar{\lambda}$ di questo sistema, per cui risulti anche $g_i(\bar{x}) \leq 0,\ \bar{\lambda}_i \geq 0,\ i = 1, \dots, p$, si hanno tutte le soluzioni locali regolari del problema (51) e i corrispondenti moltiplicatori.

Osservazione 3 *Osserviamo che, nel caso di vincoli $g(x)$ siano lineari, la regolarità dei vincoli non è necessaria (come nel caso di vincoli di uguaglianza).*

Se $f(x)$ e $h(x)$ sono due volte continuamente differenziabile, vale anche la seguente condizione necessaria del secondo ordine, in cui $\nabla g_a(x^*)$ denota la matrice gradiente dei vincoli attivi in x^*.

Teorema 29 *Sia x^* un punto di regolarità per i vincoli del Problema (51). Condizione necessaria affinchè x^* sia una soluzione locale del Problema (51) è che risulti $d^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) d \geq 0$ per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla g_a(x^*)^T d = 0$.*

Per enunciare anche una condizione sufficiente del secondo ordine, bisogna premettere la definizione di vincolo *strettamente attivo* in un punto di Kuhn-Tucker x^*. Un vincolo $g_i(x)$ è strettamente attivo in x^* se è attivo in x^*, e se il corrispondente moltiplicatore

λ_i^* è strettamente positivo; se denotiamo con $I_{sa}(x^*)$ l'insieme degli indici dei vincoli di disuguaglianza strettamente attivi in x^*, abbiamo:

$$I_{sa}(x^*) = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x^*) = 0, \lambda_i^* > 0)\}.$$

Osserviamo che se il punto x^* soddisfa la condizione di stretta complementarità, allora $I_{sa}(x^*) = I_a(x^*)$.

Possiamo denotare con g_{sa} il sottovettore di g costituito dai soli vincoli strettamente attivi in x^*: $g_{sa}(x) = [g_i(x)], i \in I_{sa}(x^*)$, e con ∇g_{sa} la matrice gradiente di g_{sa}. Abbiamo allora la seguente condizione sufficiente del secondo ordine:

Teorema 30 *Condizione sufficiente affinchè un punto ammissibile x^* sia una soluzione locale stretta del Problema (51) è che esista un moltiplicatore $\lambda^* \geq 0$ tale che $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$, ${\lambda^*}^T g(x^*) = 0$, e che risulti $d^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*) d > 0$ per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ tale che $\nabla g_{sa}(x^*)^T d = 0$, $d \neq 0$.*

Notiamo che nella condizione sufficiente non è richiesto che x^* sia un punto di regolarità.

7.10 Il caso vincolato: vincoli di disuguaglianza e di uguaglianza

Sulla base dei risultati dei paragrafi precedenti, possiamo facilmente dedurre le condizioni di ottimalità per il caso più generale del Problema (3), in cui sono presenti sia vincoli di disuguaglianza che vincoli di uguaglianza. Riscriviamo per comodità il problema, nella forma scalare:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m; \end{array} \tag{67}$$

l'associata funzione Lagrangiana è data da:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j h_j(x).$$

Abbiamo la seguente condizione necessaria del primo ordine, cui di solito si fa ancora riferimento con il nome di condizioni di Kuhn-Tucker:

Teorema 31 *Sia x^* un punto di regolarità per i vincoli del Problema (67). Condizione necessaria affinchè x^* sia una soluzione locale del problema è che esistano un vettore di moltiplicatori λ^*, con componenti $\lambda_1^*, \dots \lambda_p^*$, e un vettore di moltiplicatori μ^*, con componenti $\mu_1^*, \dots, \mu_m^*$, tali che:*

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0, \tag{68}$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \ i = 1, \dots, p \tag{69}$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \ i = 1, \dots, p. \tag{70}$$

La condizione necessaria $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$, quella di complementarità $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, $i = 1, \dots, p$ e quella di ammissibilità $h_j(x^*) = 0$, $j = 1, \dots, m$ danno luogo ad un sistema di $n + p + m$ equazioni nelle $n + p + m$ incognite x, λ, μ:

$$\begin{array}{rcl} \nabla_x L(x, \lambda, \mu) & = & 0, \\ \lambda_i g_i(x) & = & 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ h_j(x) & = & 0, \quad j = 1, \dots, m. \end{array}$$

Tra le soluzioni $\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ di questo sistema, per cui risulti anche $g_i(\bar{x}) \leq 0$, $\bar{\lambda}_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$, si hanno tutte le soluzioni locali regolari del problema (67) e i corrispondenti moltiplicatori. Ovviamente la difficoltà di procedere alla ricerca delle soluzioni di questo sistema è ancora maggiore che nei casi più semplici trattati in precedenza. Non è invece difficile, dato un punto x^k prodotto alla generica iterazione di un algoritmo, verificare se esistono moltiplicatori λ^k, μ^k tali che le condizioni siano soddisfatte, essendo le condizioni lineari rispetto ai moltiplicatori. Pertanto nel caso vincolato le condizioni necessarie di Kuhn-Tucker sono alla base della definizione di quell'insieme Ω introdotto nel paragrafo 7.1.

Occorre sottolineare che le condizioni di Kuhn-Tucker forniscono solo le soluzioni regolari; un'analisi completa del Problema (67) richiede anche di valutare la funzione obiettivo nei punti ammissibili che non sono di regolarità.

Per quel che riguarda le condizioni del secondo ordine, nell'ipotesi che le funzioni del problema siano due volte continuamente differenziabili, abbiamo le proposizioni seguenti.

Teorema 32 *Sia x^* un punto di regolarità per i vincoli del Problema (67). Condizione necessaria affinchè x^* sia una soluzione locale del Problema (67) è che esistano moltiplicatori $\lambda^* \geq 0$ e μ^* tali che $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$, ${\lambda^*}^T g(x^*) = 0$, e che per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ tale che:*

$$\begin{bmatrix} \nabla g_a(x^*)^T \\ \nabla h(x^*)^T \end{bmatrix} d = 0$$

risulti

$$d^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq 0.$$

Teorema 33 *Condizione sufficiente affinchè un punto ammissibile x^* sia una soluzione locale stretta del Problema (67) è che esistano moltiplicatori $\lambda^* \geq 0$ e μ^* tali che $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$, ${\lambda^*}^T g(x^*) = 0$, e che per ogni $d \in \mathbb{R}^n$ con $d \neq 0$ e tale che*

$$\begin{bmatrix} \nabla g_{sa}(x^*)^T \\ \nabla h(x^*)^T \end{bmatrix} d = 0$$

risulti

$$d^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0.$$

Notiamo che nella condizione sufficiente compaiono solo i vincoli di disuguaglianza strettamente attivi, e non è richiesto che x^* sia un punto di regolarità.

Osservazione 4 *Si osservi che nel Teorema 33, si deve verificare se una condizione sull'hessiano del Lagrangiano per direzioni che si trovano nell'insieme*

$$\mathcal{Y}^* = \{d \in \mathbb{R}^n : \; d \neq 0 \;\; \nabla g_{sa}(x^*)^T d = 0, \;\; \nabla h(x^*)^T d = 0\}.$$

Nel caso in cui $\mathcal{Y}^* = \emptyset$, ovvero l'unica direzione che soddisfa il sistema

$$\nabla g_{sa}(x^*)^T d = 0 \qquad \nabla h(x^*)^T d = 0,$$

è $d = 0$, la condizione sufficiente si intende banalmente soddisfatta.

Osservazione 5 *Osserviamo infine che, nel caso di vincoli lineari, la regolarità dei vincoli non è richiesta neanche per le condizioni necessarie.*

Come nel caso non vincolato, anche nel caso vincolato le condizioni necessarie del secondo ordine sono di difficile utilizzo. Sono invece di facile verifica le condizioni sufficienti del secondo ordine.

Notiamo infatti che, nei vari problemi vincolati considerati, le condizioni del secondo ordine richiedono, innanzi tutto, che siano soddisfatte le condizioni necessarie del primo ordine, sia pure in assenza di regolarità del punto considerato; e poi che sia definita positiva la matrice delle derivate seconde della funzione Lagrangiana, su un insieme che non è tutto $\mathbb{R}^n$, come nel caso non vincolato, bensì un sottospazio lineare dato dalle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee nella variabile d, in cui la matrice dei coefficienti è data dal gradiente trasposto dei vincoli di disuguaglianza strettamente attivi e/o dei vincoli di uguaglianza.

Facendo ad esempio riferimento alla Proposizione 33, se si pone $M = \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ e $B = [\nabla g_{sa}(x^*)\ \nabla h(x^*)]$, la condizione sufficiente del secondo ordine richiede che $d^T M d > 0$ per ogni $d \neq 0 : B^T d = 0$. Per effettuare questo genere di verifica, possiamo utilizzare il seguente risultato.

Teorema 34 *Sia M una matrice quadrata simmetrica $n \times n$, sia B una matrice $n \times q$, con $q < n$. Risulta $d^T M d > 0$ per ogni d tale che $B^T d = 0,\ d \neq 0,$ se e solo se, considerata la matrice di dimensione $(q+n) \times (q+n)$:*

$$\begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & M \end{pmatrix},$$

gli ultimi $(n-q)$ minori principali della medesima hanno determinanti il cui segno è pari a quello di $(-1)^q$.

Quindi anche nel caso vincolato la verifica della condizione sufficiente del secondo ordine si riconduce ad un semplice calcolo di determinanti.

Osservazione 6 *Si osservi che la condizione del Teorema 34, si applica sono quando $q < n$ ovvero quando il numero dei vincoli di uguaglianza e dei vincoli di disuguaglianza strettamente attivi è minore della dimensione n.*

Concludiamo con l'osservazione che i moltiplicatori λ^*, μ^*, forniscono i coefficienti di sensibilità del valore ottimo della funzione obiettivo $f(x^*)$ rispetto alle variazioni dei termini noti dei vincoli, rispettivamente di disuguaglianza e di uguaglianza. Ovviamente, per un vincolo non attivo, il coefficiente di sensibilità risulta nullo.

7.11 Il caso convesso

Nella Proposizione 9 abbiamo fatto vedere che un problema di ottimizzazione in cui f e $g_i,\ i = 1 \dots, p$ sono funzioni convesse e $h_j,\ j = 1, \dots, m$ sono funzioni affini, risulta essere un problema di ottimizzazione convesso. Facciamo ora vedere l'importante proprietà che, per un problema di questo tipo, le condizioni di Kuhn-Tucker, anche in assenza di regolarità, risultano essere condizioni sufficienti di ottimo globale.

Riscriviamo per comodità il problema:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ & a_j^T x - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \tag{71}$$

e dimostriamo la proposizione seguente.

Teorema 35 *Si supponga che, nel Problema (71), $f(x)$ sia una funzione (strettamente) convessa in $\mathbb{R}^n$, e che $g_i(x)$ siano funzioni convesse in $\mathbb{R}^n$. Sia x^* un punto ammissibile per il problema, e si supponga che esistano moltiplicatori λ_i^* e μ_j^* tali che:*

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* a_j = 0, \tag{72}$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \; i = 1, \dots, p \tag{73}$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \; i = 1, \dots, p. \tag{74}$$

Allora x^* è una soluzione globale (stretta) per il Problema (71).

Dimostrazione. Sia $\bar{x}$ un qualunque punto ammissibile per il problema. Risulta $g_i(\bar{x}) \leq 0$, e quindi $\lambda_i^* g_i(\bar{x}) \leq 0$; inoltre risulta $a_j^T \bar{x} - b_j = 0$. Possiamo allora scrivere la disuguaglianza:

$$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* (a_j^T \bar{x} - b_j). \tag{75}$$

Per la convessità di f e g_i abbiamo che

$$f(\bar{x}) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (\bar{x} - x^*),$$

$$g_i(\bar{x}) \geq g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (\bar{x} - x^*).$$

Sostituendo nella (75) e notando che $a_j^T \bar{x} - b_j = a_j^T (\bar{x} - x^*)$, otteniamo:

$$f(\bar{x}) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (\bar{x} - x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* (g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (\bar{x} - x^*)) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j^* a_j^T (\bar{x} - x^*). \tag{76}$$

Poichè a_j risulta essere il gradiente del vincolo lineare, la precedente disuguaglianza può essere riscritta, mettendo in evidenza $(\bar{x} - x^*)$:

$$f(\bar{x}) \geq f(x^*) + \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)^T (\bar{x} - x^*) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^* g_i(x^*); \tag{77}$$

da cui si ottiene, tenendo conto delle condizioni di KT $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$, $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, p$, che $f(\bar{x}) \geq f(x^*)$. Poichè $\bar{x}$ è un qualunque punto ammissibile per il Problema (71), risulta che x^* è una soluzione globale. Si lascia per esercizio la conclusione che, nel caso in cui f è strettamente convessa, x^* è una soluzione globale stretta. □

Osserviamo quindi che, nel caso convesso, le condizioni di KKT sono necessarie sotto ipotesi di regolarità dei vincoli, e sufficienti senza ipotesi di regolarità.

Nel caso particolare di problemi con vincoli lineari, in cui quindi l'insieme ammissibile è un poliedro, la regolarità dei vincoli non è richiesta nemmeno per la parte necessarie. Possiamo quindi enunciare il seguente risultato:

Teorema 36 *Si supponga che, nel Problema (67), $f(x)$ sia una funzione (strettamente) convessa in $\mathbb{R}^n$, e i vincoli di uguaglianza e disuguaglianza siano lineari. Condizione necessaria e sufficiente affinche un punto x^* ammissibile per il problema sia un minimo globale (stretto) è che valgano le condizioni di KKT.*