

4 Forme e funzioni quadratiche

Data una matrice A quadrata e simmetrica di dimensione $(n \times n)$, con elementi $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$, si definisce *forma quadratica* associata alla matrice A la funzione:

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (5)$$

Come sarà chiaro nel seguito, le forme quadratiche hanno un ruolo importante nell'Ottimizzazione. Una *funzione quadratica* è una funzione del tipo

$$q(x) = \frac{1}{2} x^T Ax + c^T x$$

Una forma quadratica è quindi una particolare funzione quadratica in cui il termine lineare è identicamente nullo ($c = 0$).

In questo paragrafo consideriamo le proprietà di forme e funzioni quadratiche di cui si fa uso corrente.

La forma quadratica $x^T Ax$ e, corrispondentemente, la matrice A associata alla forma quadratica si dicono:

- *definita positiva* ($A \succ 0$), se risulta $x^T Ax > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$;
- *semidefinita positiva* ($A \succeq 0$), se risulta $x^T Ax \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$;
- *indefinita* se per qualche $x \in \mathbb{R}^n$ risulta $x^T Ax > 0$, e per altri $x \in \mathbb{R}^n$ risulta $x^T Ax < 0$.

La forma quadratica $x^T Ax$ si dice (semi)definita negativa se $-x^T Ax$ è (semi)definita positiva.

Corrispondentemente, la matrice A associata alla forma quadratica si dice (semi)definita negativa se la matrice $-A$ è (semi)definita positiva. Nel seguito ci riferiremo in modo indifferente a forme quadratiche o alla matrice A associata alla forma quadratica.

Per verificare se una matrice A è definita positiva, si può utilizzare un semplice test.

Criterio 1 Siano $A_k, k = 1 \dots, n$ gli n minori principali della matrice A , detti sottomatrici principali di nord-ovest, cioè le n sottomatrici con elementi $a_{ij}, i, j = 1, \dots, k$, ottenute da A eliminando le ultime $n - k$ righe e colonne. Denotato con $\det A_k$ il determinante di A_k , risulta che:

- A è definita positiva se, e solo se, $\det A_k > 0$, per $k = 1, \dots, n$.

Si osserva che se A è semidefinita positiva allora risulta $\det A_k \geq 0$, ma non è vero in generale il viceversa. Basta prendere come esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2a_{22} \end{pmatrix} \quad (6)$$

con $a_{22} < 0$ e la forma quadratica associata

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

in cui $a_{11} = a_{12} = 0$. I minori principali A_1 e A_2 hanno determinante nullo, e quindi soddisfano il criterio $\det A_k \geq 0$, ma $q(x)$ è semidefinita negativa !!!

Per verificare se una matrice A è semidefinita positiva si deve applicare un criterio molto più oneroso riportato di seguito.

Criterio 2 Siano A_{I_k} le sottomatrici di A di dimensione $k \in [1, n]$ con elementi a_{ij} con $i, j \in I_k$, dette minori principali di ordine k di A . A è semidefinita positiva se, e solo se, tutti i minori principali per $k = 1, \dots, n$ sono non negativi, ovvero, denotato con $\det A_{I_k}$ il determinante di A_{I_k} ,

- A è semidefinita positiva se, e solo se, $\det A_{I_k} \geq 0$ per ogni sottoinsieme di righe/colonne $I_k \subseteq \{1, \dots, n\}$ di cardinalità k con $1 \leq k \leq n$.

Ad esempio in una matrice di dimensione $n = 3$, le matrici A_{I_k} per $k = 1, 2, 3$ sono quelle corrispondenti ai seguenti insiemi di indici: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$. Tra questi minori, ci sono ovviamente i minori di Nord-ovest che corrispondono agli insiemi $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}$.

Applicando il criterio alla matrice (6), si verifica facilmente che non è soddisfatto.

Per analizzare se una matrice A è definita/semidefinita negativa si possono applicare i criteri precedenti alla matrice $-A$ associata alla forma quadratica.

Un altro test per verificare il segno di una forma quadratica consiste nel determinare gli *autovalori* della matrice A , cioè i valori α_i , $i = 1, \dots, n$ che risolvono l'equazione di grado n :

$$\det(A - \alpha I) = 0,$$

ove I è la matrice identica di ordine n . Se la matrice A è simmetrica, si ha che gli autovalori sono tutti reali. Risulta che:

- A è definita positiva se, e solo se, $\alpha_i > 0$, per $i = 1, \dots, n$;
- A è semidefinita positiva se, e solo se, $\alpha_i \geq 0$ per $i = 1, \dots, n$;
- A è indefinita, altrimenti.

È evidente che il test basato sui minori è di più semplice impiego di quello basato sugli autovalori: infatti calcolare determinanti, fino all'ordine n , è più semplice che risolvere un'equazione di grado n .

Nel seguito indicheremo $\alpha_{\min}(A)$ e $\alpha_{\max}(A)$ rispettivamente il più piccolo e il più grande autovalore di una matrice A .

Si verifica facilmente che il gradiente e l'Hessiano della forma quadratica sono dati rispettivamente da:

$$\text{gradiente} = Ax, \quad \text{hessiano} = A.$$

Ricordiamo inoltre che per ogni forma quadratica del tipo $x^T Ax$, vale la seguente caratterizzazione

$$\alpha_{\min}(A)\|x\|^2 \leq x^T Ax \leq \alpha_{\max}(A)\|x\|^2. \quad (7)$$

Abbiamo il seguente risultato.

Teorema 3 Sia data una funzione quadratica

$$q(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + c^T x$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché $q(x)$ sia coerciva è che A sia definita positiva.

Dim. Dimostriamo che se A è definita positiva allora $q(x)$ è coerciva. Utilizzando la (7) e il fatto che $c^T x \geq -|c^T x| \geq -\|c\|\|x\|$, possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}x^T Ax + c^T x \geq \frac{1}{2}\alpha_{\min}(A)\|x\|^2 - |c^T x| \geq \frac{1}{2}\alpha_{\min}(A)\|x\|^2 - \|c\|\|x\| = \|x\| \left(\frac{1}{2}\alpha_{\min}(A)\|x\| - \|c\| \right)$$

Per $\|x\|$ sufficientemente grande, poiché $\alpha_{\min}(A) > 0$ risulta $\frac{1}{2}\alpha_{\min}(A)\|x\| - \|c\| > 0$, e quindi $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} q(x) = \infty$.

(non in programma) Dimostriamo ora che se $q(x)$ è coerciva allora A è definita positiva. Procediamo per assurdo e supponiamo che $q(x)$ sia coerciva e $\alpha_{\min}(A) \leq 0$. Sia u l'autovettore corrispondente all'autovalore $\alpha_{\min}(A)$, cioè

$$Au = \alpha_{\min}(A)u.$$

Si ha

$$q(\lambda u) = \frac{1}{2}\lambda^2 u^T Au + \lambda c^T u = -\frac{1}{2}\lambda^2 |\alpha_{\min}(A)| \|u\|^2 + \lambda c^T u.$$

Se $\alpha_{\min}(A) = 0$ la funzione diventa $q(\lambda u) = \lambda c^T u$, cioè una funzione lineare che non è coerciva.

Se invece $\alpha_{\min}(A) < 0$, ricordando che $c^T x \leq |c^T x| \leq \|c\|\|x\|$, possiamo scrivere

$$q(\lambda u) \leq -\frac{1}{2}\lambda^2 |\alpha_{\min}(A)| \|u\|^2 + \lambda \|c\| \|u\| = \lambda \|u\| \left(-\frac{1}{2}\lambda |\alpha_{\min}(A)| \|u\| + \|c\| \right)$$

Al limite per $\lambda \rightarrow \infty$, la quantità tra parentesi è negativa e risulta $q(\lambda u) \rightarrow -\infty$, contraddicendo l'ipotesi di coercività. \square

Domande

1) Si supponga che la matrice A sia data dal prodotto di una matrice B ($n \times m$) per la trasposta di B : $A = BB^T$. Cosa si può dire sulla forma quadratica associata ad A ?