

## 7.8 Analisi di sensibilità per vincoli di uguaglianza

Una volta determinata una soluzione  $x^*$  del Problema (37), risulta di notevole interesse avere indicazioni su come varia il valore ottimo della funzione obiettivo  $f(x^*)$ , se si effettuano (piccole) variazioni dei dati del problema. L'analisi di queste variazioni viene detta *analisi di sensibilità*. Di particolare interesse risulta l'analisi di sensibilità rispetto al secondo membro di un vincolo di uguaglianza  $h_j(x) = 0$ , in quanto mette in evidenza una fondamentale proprietà del moltiplicatore  $\mu_j^*$ .

Sia  $x^*$  una soluzione del problema (37),  $f(x^*)$  il valore ottimo della funzione obiettivo. Vogliamo analizzare cosa accade al valore ottimo della funzione obiettivo se il secondo membro del vincolo varia da 0 a un valore  $\epsilon$ . L'analisi che si vuole effettuare si riferisce quindi alla perturbazione del Problema (37) del tipo:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h_j(x) = \epsilon_j \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

ovvero in forma vettoriale

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h(x) = \epsilon \end{aligned} \tag{46}$$

con  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ed  $\epsilon \in \mathbb{R}^m$ . Vogliamo cioè analizzare la relazione tra la soluzione trovata per il Problema (37) e quella del problema perturbato, la cui funzione Lagrangiana è data, mettendone in evidenza la dipendenza da  $\epsilon$ , da:

$$L(x, \mu; \epsilon) = f(x) + \mu^T (h(x) - \epsilon).$$

A titolo di esempio consideriamo il problema con un solo vincolo lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

la cui soluzione ottima è  $x^* = (1/2 \ 1/2)^T$  di valore  $f(x^*) = 1/2$ , con moltiplicatore  $\mu^* = -1$ , ottenuta risolvendo il sistema delle condizioni necessarie di Lagrange

$$\begin{aligned} 2x_1^* + \mu^* &= 0 \\ 2x_2^* + \mu^* &= 0 \\ x_1^* + x_2^* &= 1 \end{aligned}$$

Supponiamo di perturbare il termine noto di  $\epsilon$  e consideriamo il nuovo vincolo  $x_1 + x_2 = 1 + \epsilon$  con  $\epsilon \in \mathbb{R}$ . Se un punto  $x^*(\epsilon)$  è ottimo per il problema perturbato (PP) allora esiste un  $\mu^*(\epsilon)$  tale che

$$\begin{aligned} 2x_1^*(\epsilon) + \mu^*(\epsilon) &= 0 \\ 2x_2^*(\epsilon) + \mu^*(\epsilon) &= 0 \\ x_1^*(\epsilon) + x_2^*(\epsilon) &= 1 + \epsilon \end{aligned}$$

Risolvendo si ottiene la soluzione

$$x_1^*(\epsilon) = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad x_2^*(\epsilon) = \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}, \quad \mu^*(\epsilon) = -1 - \epsilon.$$

La funzione obiettivo in questo punto vale

$$f(x^*(\epsilon)) = \frac{1}{2} + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} = f(x^*) - \mu^* \epsilon + o(\epsilon).$$

Ovvero la differenza  $f(x^*(\epsilon)) - f(x^*)$  ha un andamento che, in prima approssimazione, è del tipo  $-\mu^* \epsilon$ . Questa considerazione può essere generalizzata.

Indichiamo con  $x^*(\epsilon)$  una soluzione del problema (46) e con  $\mu^*(\epsilon)$  il corrispondente moltiplicatore. Per  $\epsilon = 0$  abbiamo  $x^*(0) = x^*$  e  $\mu^*(0) = \mu^*$ . Vogliamo studiare l'andamento della funzione  $f(x^*(\epsilon))$  per piccole variazioni di  $\epsilon$  nell'intorno di  $\epsilon = 0$ . A tale scopo possiamo premettere il seguente risultato, che si riporta senza dimostrazione.

**Teorema 27** *Sia dato il problema (37) e siano  $x^*, \mu^*$  rispettivamente una soluzione e il corrispondente moltiplicatore. Supponiamo che  $x^*$  sia un punto regolare e che  $(x^*, \mu^*)$  soddisfino le condizioni sufficienti del 2° ordine. Si consideri una famiglia di problemi (46), ovvero*

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h(x) = \epsilon, \end{aligned}$$

parametrizzata dal vettore  $\epsilon \in \mathbb{R}^m$ .

Allora esiste un intorno  $\mathcal{S}$  di  $\epsilon = 0$  tale che per ogni  $\epsilon \in \mathcal{S}$

1. esistono un  $x^*(\epsilon) \in \mathbb{R}^n, \mu^*(\epsilon) \in \mathbb{R}^m$  che sono soluzione e corrispondente moltiplicatore del problema (46);
2. risulta  $x^*(0) = x^*, \mu^*(0) = \mu^*$ ;
3.  $x^*(\epsilon) \in \mathbb{R}^n, \mu^*(\epsilon) \in \mathbb{R}^m$  sono funzioni di  $\epsilon$  continuamente differenziabili in  $\mathcal{S}$ .

Nel seguito, per semplificare l'analisi facciamo dapprima riferimento ad un problema con un solo vincolo di uguaglianza:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h(x) = 0 \end{aligned} \tag{47}$$

con  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , la cui soluzione è  $x^*$  con moltiplicatore  $\mu^* \in \mathbb{R}$ .

Il problema perturbato è:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h(x) = \epsilon, \end{aligned} \tag{48}$$

con  $\epsilon \in \mathbb{R}$ .

Indichiamo con  $x^*(\epsilon)$  una soluzione del Problema (48) e  $\mu^*(\epsilon) \in \mathbb{R}$  il corrispondente moltiplicatore, che, nelle ipotesi del Teorema 27 esistono e sono funzioni di  $\epsilon$  continuamente differenziabili in un intorno di  $\epsilon = 0$ . Inoltre per  $\epsilon = 0$  abbiamo  $x^*(0) = x^*$  e  $\mu^*(0) = \mu^*$ .

Possiamo ora ottenere indicazioni su come varia  $f(x^*(\epsilon))$  per piccole variazioni di  $\epsilon$ , nell'intorno di  $\epsilon = 0$ . Infatti, poiché le funzioni  $f(x^*(\epsilon))$  e  $x^*(\epsilon)$  sono continuamente differenziabili rispetto ad  $\epsilon$  (almeno in un intorno  $\mathcal{S}$  di  $\epsilon = 0$ ), possiamo scrivere la formula di Taylor troncata ai termini del primo ordine:

$$f(x^*(\epsilon)) - f(x^*(0)) = \left. \frac{df(x^*(\epsilon))}{d\epsilon} \right|_{(\epsilon=0)} \epsilon + o(\epsilon).$$

Quindi per avere informazioni sull'andamento  $f(x^*(\epsilon)) - f(x^*)$  si deve determinare il termine  $\left. \frac{df(x^*(\epsilon))}{d\epsilon} \right|_{(\epsilon=0)}$ .

Tale determinazione non è immediata in quanto la relazione tra  $x^*(\epsilon)$  e  $f(x^*(\epsilon))$  si ottiene solo risolvendo il problema (46). Per superare questa difficoltà, possiamo utilizzare la funzione Lagrangiana per il problema (46) che è data da:

$$L(x, \mu, \epsilon) = f(x) + \mu(h(x) - \epsilon).$$

Calcolata in  $(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon))$ , si ottiene

$$L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon) = f(x^*(\epsilon)) + \mu^*(\epsilon)(h(x^*(\epsilon)) - \epsilon) = f(x^*(\epsilon)),$$

in quanto in  $x^*(\epsilon)$  il vincolo del problema perturbato deve essere soddisfatto. Da cui si ottiene che

$$\left. \frac{dL(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{d\epsilon} \right|_{(\epsilon=0)} = \left. \frac{df(x^*(\epsilon))}{d\epsilon} \right|_{(\epsilon=0)}$$

Si tratta quindi di determinare l'espressione di  $\left. \frac{dL(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{d\epsilon} \right|_{(\epsilon=0)}$ . Si tratta di una funzione composta, e quindi si può scrivere

$$\begin{aligned} \left. \frac{dL(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{d\epsilon} \right|_{(\epsilon=0)} &= \left[ \nabla_x L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)^T \frac{dx^*(\epsilon)}{d\epsilon} \right]_{(\epsilon=0)} \\ &+ \left[ \frac{\partial L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{\partial \mu} \frac{d\mu^*(\epsilon)}{d\epsilon} \right]_{(\epsilon=0)} + \left. \frac{\partial L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{(\epsilon=0)} \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\left[ \nabla_x L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon) \right]_{(\epsilon=0)} = \nabla_x L(x^*(0), \mu^*(0), 0) = \nabla_x L(x^*, \mu^*) = 0$$

perché  $x^*, \mu^*$  soddisfano le condizioni di Lagrange; inoltre

$$\left. \frac{\partial L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{\partial \mu} \right|_{(\epsilon=0)} = h(x^*(0)) = h(x^*) = 0$$

in quanto  $x^*$  è ammissibile. Inoltre dall'espressione della funzione Lagrangiana per il problema perturbato, possiamo scrivere

$$\frac{\partial L(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{\partial \epsilon} = -\mu^*(\epsilon).$$

Otteniamo quindi

$$\left. \frac{df(x^*(\epsilon))}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \left. \frac{dL(x^*(\epsilon), \mu^*(\epsilon), \epsilon)}{d\epsilon} \right|_{(\epsilon=0)} = -\mu^*(0) = -\mu^*. \quad (49)$$

Possiamo allora scrivere:

$$f(x^*(\epsilon)) = f(x^*) - \mu^* \epsilon + o(\epsilon),$$

e cioè, per piccoli valori di  $\epsilon$ , possiamo dire

$$\frac{f(x^*(\epsilon)) - f(x^*)}{\epsilon} \simeq -\mu^*. \quad (50)$$

Questo risultato si esprime dicendo che il moltiplicatore  $\mu^*$ , cambiato di segno, fornisce il *coefficiente di sensibilità* del valore ottimo della funzione obiettivo rispetto a variazioni del termine noto del vincolo.

Questa interpretazione del moltiplicatore  $\mu^*$  è di grande utilità pratica. Infatti se risulta  $\mu^* > 0$  ci si può aspettare che, per piccoli valori di  $\epsilon > 0$  risulti  $f(x^*(\epsilon)) < f(x^*)$ . Si può allora risolvere il Problema (48) con un valore  $\epsilon$  assegnato, per verificare se il *beneficio*, espresso dalla differenza  $f(x^*) - f(x^*(\epsilon))$  compensa il *costo* da sostenere per variare da 0 ad  $\epsilon$  il secondo membro del vincolo <sup>2</sup>.

Nel caso in cui i vincoli siano  $m$  e siano  $\mu_j^*$  il moltiplicatore associato al vincolo  $h_j$ , e  $\epsilon_j$  la variazione del termine noto dello stesso vincolo, possiamo scrivere lo sviluppo di Taylor al primo ordine:

$$f(x^*(\epsilon)) = f(x^*(0)) + \nabla_{\epsilon}^T f(x^*(\epsilon)) |_{(\epsilon=0)} \epsilon + o(\epsilon),$$

dove  $\nabla_{\epsilon} f(x^*(\epsilon))$  è il vettore di  $\mathbb{R}^m$  che denota le derivate parziali prime rispetto a  $\epsilon_j$  con  $j = 1 \dots, m$ . Otteniamo quindi la relazione:

$$f(x^*(\epsilon)) - f(x^*) \simeq - \sum_{j=1}^m \mu_j^* \epsilon_j.$$

---

<sup>2</sup>Ad esempio, in un problema di allocazione di risorse, il vincolo esprime una limitazione sulla disponibilità di risorse; effettuando l'analisi di sensibilità si può valutare se è conveniente aumentare o diminuire la disponibilità.