SIMULAZIONE ESAME di OTTIMIZZAZIONE

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **XXXXXXXXXXXXXXXXXX** **Nome** : **XXXXXXXXXXXXXXX**

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
le risposte CORRETTE valgono **1** PUNTO e
quelle SBAGLIATE **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO).
Per gli esercizi 5,6,7:
le risposte CORRETTE valgono **0,25** PUNTI e
quelle SBAGLIATE **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO).

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 - 2x_1 - x_2 - 4x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione non è strettamente convessa in $\Re^3$.

   VERO | FALSO **X**

2. La funzione è coerciva in $\Re^3$.

   VERO **X** | FALSO

3. Il punto $(3,\ -4\ ,2,)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** | FALSO

4. Il punto $(3,\ -4\ ,2,)^T$ non è un minimo.

   VERO | FALSO **X**

5. Le direzioni $d^0 = (0,\ 0, -1)^T$ e $d^1 = (1,\ -4, 1)^T$ sono coniugate tra loro. Inoltre nel punto $x^0 = (0,\ 2,\ -1)^T$, il passo α ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione d^0 è negativo.

   VERO **X** | FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*)

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 + x_2 \\ & (x_1-4)^2 + (x_2-3)^2 \leq 25 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è strettamente convesso. | VERO | | FALSO **X** |
2. In base al teorema di Weierstrass, esiste sicuramente un punto di minimo globale.

   | VERO **X** | | FALSO |
3. Il punto $(0,\ 6)^T$ è di regolarità per i vincoli.

   | VERO | | FALSO **X** |
4. Il punto $x^* = (8,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni di KKT.

   | VERO **X** | | FALSO |
5. Se nel primo vincolo del problema a 25 si sostituisce $25+\epsilon$, la funzione obiettivo all'ottimo migliora.

   | VERO **X** | | FALSO |

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{array}{ll} \min & 10x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_3 \geq 0. \end{array}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema.

1. Il problema

   $$\begin{array}{ll} \max & 2u_1 - 3u_2 \\ & u_1 + 4u_2 \geq -10 \\ & u_1 + u_2 \geq 2 \\ & u_1 \geq 1 \\ & u_2 \geq 0 \end{array}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   | VERO | | FALSO **X** |
2. Il problema

   $$\begin{array}{ll} \max & 2u_1 - 3u_2 \\ & -u_1 - 4u_2 \leq 10 \\ & u_1 + u_2 = 2 \\ & u_1 \leq 1 \\ & u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**	FALSO

3. Il punto $\bar{u} = (0,\ 2)^T$ è ammissibile per il duale e si ha $c^T x^* \geq -6$.

VERO **X**	FALSO

4. Il punto $x^* = (0,\ 3,\ 5/2)^T$ è ottimo per il primale ed esiste una soluzione ottima per il problema duale.

VERO **X**	FALSO

5. Il problema duale è illimitato superiormente.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**)

Una azienda automobilistica produce tre diversi modelli di autovettura: un modello economico, uno normale ed uno di lusso. Ogni autovettura viene lavorata da tre robot: **A,B,C**. I tempi necessari alla lavorazione sono riportati, in minuti, nella tabella seguente(min_{ji}) insieme al profitto netto realizzato per autovettura($prezzo_i$).

	Economica	Normale	Lusso
A	20	30	62
B	31	42	51
C	16	81	10
Prezzo	1000	1500	2200

La disponibilità giornaliera, in minuti, di ciascun robot è riportata nella seguente tabella(min_tot_j).

	A	B	C
minuti/giorno	480	480	300

Il numero di autovetture di lusso prodotte non deve superare il 20% del totale mentre il numero di autovetture economiche deve costituire almeno il 40% della produzione complessiva. Supponendo che tutte le autovetture vengano vendute, formulare un problema di Programmazione Lineare che permetta di decidere le quantità giornaliere (non necessariamente intere) da produrre per ciascun modello in modo tale da massimizzare i profitti rispettando i vincoli di produzione.

Una possibile formulazione è la seguente:
siano x_i, con $i \in Auto = \{Economica,\ Normale,\ Lusso\}$, le variabili di decisione del problema, ovvero x_i indica il numero di auto di tipo i prodotte giornalmente

$$\max \sum_{i \in Auto} prezzo_i \cdot x_i$$

$$\sum_{i \in Auto} min_{ji} \cdot x_i \leq min\_tot_j, \quad \forall j \in Robot = \{A, B, C\}$$

$$x_{Lusso} \leq 0.2 \cdot \sum_{i \in Auto} x_i$$

$$x_{Economica} \geq 0.4 \cdot \sum_{i \in Auto} x_i$$
$$x_i \geq 0$$

1. La seguente dichiarazione, nel file .mod, di insiemi, parametri e variabili è corretta:
```
set Auto;
param Robot;
param min{Robot,Auto};
param min_tot{Robot};
param prezzo{Auto};
var x{Auto}>=0;
```

VERO	FALSO **X**

2. Sia dato il seguente vincolo nel file .mod:
```
s.t.  minuti_robot{j in Robot}:sum{i in Auto}min[j,i]*x[i]<= min_tot[j];
```
allora `Robot` e `Auto` sono stati dichiarati, precedentemente, come *insiemi*.

VERO **X**	FALSO

3. Supponendo che nel file .mod si abbia la seguente dichiarazione
```
set Auto;
var x{Auto};
```
e supponendo che nel file .dat si abbia la seguente definizione
```
set Auto:= Economica Normale Lusso;
```
allora i seguenti vincoli sono corretti:
```
s.t.  perc_lusso:x[Lusso]<=0.2*sum{i in Auto}x[i];
s.t.  perc_econ:x[Economica]>=0.4*sum{i in Auto}x[i];
```

VERO **X**	FALSO

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata
$$\min_{R^n} \ f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $\nabla f(\bar{x}) \not\succeq 0$ (non è semidefinita positiva), allora $\bar{x}$ non è minimo.

VERO **X**	FALSO

2. Se un algoritmo per la soluzione di (P) è globalmente convergente, converge sicuramente ad un minimo globale.

VERO	FALSO **X**

3. Se $f(x)$ è convessa, esiste sempre una soluzione al problema $\min_{R^n} \; f(x)$.

VERO	FALSO **X**

4. Se in $\bar{x}$ una direzione d è tale che $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$, allora si può affermare che d non è di discesa.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & g(x) \geq 0 \end{array}$$

con $g : R^n \to \; R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e risulta per ogni $j = 1, \dots, m$:

$$g_j(y) \geq g_j(x) + \nabla g_j(x)^T (y - x), \quad \forall \; x, y \in \Re^n$$

allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. La funzione

$$f(x) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{m} \min\{0, g_i(x)\}^2$$

è una funzione di penalità esterna per il problema.

VERO **X**	FALSO

3. Se in un punto ammissibile $\bar{x}$ i gradienti dei vincoli $\nabla g_j(\bar{x}), \; j = 1, \dots, m$, sono linearmente indipendenti, i vincoli sono regolari in $\bar{x}$.

VERO **X**	FALSO

4. Se in un punto ammissibile $\bar{x}$ che soddisfa le condizioni di KKT vale la condizione di *stretta complementarità* allora l'insieme dei vincoli attivi $I_a(\bar{x})$ coincide con l'insieme dei vincoli strettamente attivi $I_{sa}(\bar{x})$.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO	FALSO **X**

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^*, il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale è $c^T x^*$.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} \leq c$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO **X**	FALSO

4. Se il problema duale ha insieme ammissibile vuoto in R^m, allora anche il problema primale deve avere insieme ammissibile vuoto in R^n.

VERO	FALSO **X**

ULTERIORI POSSIBILI DOMANDE SIMULAZIONE ESAME di OTTIMIZZAZIONE

Esercizio 1. Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 - 2x_1 - x_2 - 4x_3$$

1. Il punto $(3, \ -4\ , 2,)^T$ è l'unico punto di minimo globale.

   VERO **X** FALSO

2. La direzione $d^0 = (0, \ 0, -1)^T$ è di discesa in $x^0 = (0, \ 2, \ -1)^T$.

   VERO FALSO **X**

3. Il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione del metodo del gradiente a partire dal punto $x^0 = (0, \ 2, \ -1)^T$ è $\alpha^* = \frac{1}{4}$.

   VERO **X** FALSO

4. Il passo $\alpha = \frac{1}{6}$ soddisfa una ricerca di linea di tipo Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente a partire dal punto $x^0 = (0, \ 2, \ -1)^T$(con parametro $\gamma = \frac{1}{6}$).

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2

Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 + x_2 \\ & (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 25 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

1. Il problema è convesso. VERO **X** FALSO
2. Il punto $(0, \ 6)^T$ soddisfa le condizioni di KKT.

   VERO FALSO **X**

3. Il punto $x^* = (8, \ 0)^T$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

   VERO **X** FALSO

4. Il punto $x^* = (8, \ 0)^T$ è un minimo globale.

   VERO **X** FALSO

5. Se al vincolo $x_2 \leq 6$ del problema si sostituisce $x_2 \leq 6 - \epsilon$, la funzione obiettivo all'ottimo peggiora.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$
\begin{array}{ll}
\min & 10x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\
& -x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\
& 4x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1 \geq 0, \\
& x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema.

1. Il problema

$$
\begin{array}{ll}
\max & 2u_1 - 3u_2 \\
& u_1 + 4u_2 \geq -10 \\
& u_1 + u_2 = 2 \\
& u_1 \leq 1 \\
& u_2 \geq 0
\end{array}
$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X** FALSO

2. Il punto $\bar{x} = (0, \ -2, \ 0)^T$ è ammissibile per il primale e si ha $b^T u \leq 4$ per ogni u ammissibile per il problema duale.

VERO **X** FALSO

3. Il punto $u^* = (1, \ 1)^T$ è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima per il problema primale.

VERO **X** FALSO

4. Il problema primale è vuoto.

VERO FALSO **X**

Esercizio 4.

1. Supponendo di aver dichiarato nel file .mod

```
set Auto;
set Robot;
param min{Robot,Auto};
```

allora la seguente definizione, nel file .dat, è corretta

```
set Auto:= Economica Normale Lusso;
set Robot:= A B C;
param min:    A B C:=
Economica   20 30 62
Normale     31 42 51
Lusso       16 81 10;
```

VERO FALSO **X**