ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta CORRETTA vale **1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_1x_2 + \sqrt{3}x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3 + x_1 + x_2 + \sqrt{3}x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è strettamente convessa in $\Re^3$.

   VERO | FALSO **X**

2. Il punto $(0,\ -1,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** | FALSO

3. Il punto $(0,\ -1,\ 0)^T$ è un minimo locale non globale.

   VERO | FALSO **X**

4. Nel punto $x^0 = (-1,\ 0,\ 0)^T$ il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione del metodo del gradiente è $\alpha^* = \frac{1}{2}$

   VERO **X** | FALSO

5. Nel punto $x^0 = (-1,\ 0,\ 0)^T$ la direzione $d = (-1,\ 1,\ 0)^T$ è di discesa per f.

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & (x_1 + \frac{1}{2})^2 + x_2^2 \geq 1 \\ & (x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso (utilizzare, se necessario, la rappresentazione grafica).

   VERO ☐ FALSO **X**

2. L'insieme ammissibile è regolare.

   VERO **X** FALSO ☐

3. I moltiplicatori $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 0$ associati rispettivamente al primo e secondo vincolo soddisfano con opportuni valori di x_1, x_2 le condizioni di KKT.

   VERO **X** FALSO ☐

4. Il punto $x_1^* = \frac{1}{2}$, $x_2^* = 0$ NON soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

   VERO ☐ FALSO **X**

5. Il punto $x^0 = (0,\ 0)^T$ può essere scelto come punto iniziale per un algoritmo risolutivo basato su una funzione di penalità sequenziale interna.

   VERO ☐ FALSO **X**

Esercizio 3 . (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & -6x_1 + 12x_2 + 6x_3 \\ & -2x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con u^* la soluzione ottima del problema duale (se esiste) e sia $\bar{x} = (0, 1, 1)^T$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 \leq -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & -u_2 \leq 6 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO ☐ FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 \leq -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_2 \geq -6 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**	FALSO

3. Se esiste la soluzione ottima x^* del problema primale , si ha $c^T x^* \leq 18$.

VERO **X**	FALSO

4. Il problema duale è vuoto ed il problema primale è illimitato.

VERO	FALSO **X**

5. Il punto $u = (3,\ 0)^T$ è ammissibile e ottimo per il problema duale.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia data la seguente funzione obiettivo

$$\min_{x_i} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} x_i \cdot x_j \cdot a_{i,j} - \sum_{i \in N} b_i \cdot x_i$$

dove N è un generico insieme, x_i costituiscono le variabili del problema mentre $a_{i,j}, b_i$ sono parametri. Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Una possibile dichiarazione dei parametri e delle variabili in AMPL è la seguente:

```
param N;
param a{N,N};
param b{N};
var x{N};
```

VERO	FALSO **X**

2. Una possibile traduzione AMPL della funzione obiettivo è la seguente:

```
minimize obiettivo:sum{i in N,j in N}x[i]*x[j]*a[i,j]-sum{i in N}b[i]*x[i];
```

VERO **X**	FALSO

3. Supponiamo che l'insieme N abbia i seguenti elementi

$$N = \{g, h, f\}$$

e che la matrice a e il vettore b siano costituiti dai seguenti elementi:

allora una possibile definizione nel file `.dat` di a e b potrebbe essere la seguente:

a	g	h	f
g	5	1	3
h	2	4	7
f	2	0	0

b	g	h	f
	5	4	1

```
param a:=  gg 5  gh 1  gf 3
           hg 2  hh 4  hf 7
           fg 2  fh 0  ff 0;

       param b:= g 5 h 4 f 1;
```

VERO **X** FALSO

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} \; f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se l'insieme $\{x : \; f(x) \leq f(\bar{x})\}$ è compatto, esiste sempre una soluzione per il problema $\min_{R^n} \; f(x)$.

   VERO **X** FALSO

2. Se esiste una soluzione $\bar{x}$ per il problema $\min_{R^n} \; f(x)$, allora $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$.

   VERO FALSO **X**

3. Se in $\bar{x}$ risulta $\nabla f(\bar{x}) = 0$, si può sempre definire la direzione del metodo di Newton.

   VERO FALSO **X**

4. Se un algoritmo per la minimizzazione non vincolata converge con rapidità di convergenza superlineare, allora converge anche con rapidità lineare.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & Ax = b \\ & l \leq x \leq U \end{array}$$

con A matrice $m \times n$, b vettore in R^m, $l < U$ vettori di R^n entrambi finiti. Si supponga che il sistema $Ax = b$ ammetta soluzione. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema può NON avere soluzione

   VERO FALSO **X**

2. Se $f(x)$ è convessa, allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

3. Per il problema le condizioni di KKT si applicano solo nell'ipotesi di regolarità dei vincoli.

VERO	FALSO **X**

4. Per la soluzione del problema si può utilizzare un metodi di penalità sequenziale interna.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO	FALSO **X**

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale soddisfa $c^T\bar{x} \leq b^T u^* \leq b^T\bar{u}$, per ogni $\bar{x}, \bar{u}$ ammissibile rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO	FALSO **X**

3. Se $\bar{x} \in R^n$ ammissibile per il primale e $\bar{u} \in R^m$ tale che $A^T\bar{u} \geq c$, sono tali che $b^T\bar{u} = c^T\bar{x}$, allora $\bar{x}, \bar{u}$ sono soluzioni ottime rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale ha insieme ammissibile vuoto.

VERO **X**	FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (azzurro)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2º anno

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta CORRETTA vale **1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \; x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{3}{2}x_3^2 + x_1x_2 + \sqrt{3}x_1x_3 + x_1 + x_2 + \sqrt{3}x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in $\Re^3$.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(0, \; -1, \; 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO FALSO **X**

3. La funzione non ammette minimo.

   VERO **X** FALSO

4. Nel punto $x^0 = (-1, \; 0, \; 0)^T$ una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente accetta passo $\alpha = \frac{1}{2}$ per qualunque valore di $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$.

   VERO **X** FALSO

5. Nel punto $x^0 = (-1, \; 0, \; 0)^T$ la direzione $d = (-1, \; 1, \; 0)^T$ è di discesa per f.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ & x_1^2 + (x_2 + \frac{1}{2})^2 \geq 1 \\ & x_1^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso (utilizzare, se necessario, la rappresentazione grafica).

   VERO **X** FALSO

2. L'insieme ammissibile non è regolare.

   VERO FALSO **X**

3. I moltiplicatori $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 0$ associati rispettivamente al primo e secondo vincolo NON soddisfano con opportuni valori di x_1, x_2 le condizioni di KKT.

   VERO FALSO **X**

4. Il punto $x_1^* = 0,\ x_2^* = \frac{1}{2}$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

   VERO **X** FALSO

5. Il punto $x^0 = (0,\ 0)^T$ può essere scelto come punto iniziale per un algoritmo risolutivo basato su una funzione di penalità sequenziale interna.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & -6x_1 - 12x_2 + 6x_3 \\ & -2x_1 - 4x_2 \geq 1 \\ & 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ & x_2,\ x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 = -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & -u_2 \leq -6 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 + 3u_2 = -6 \\ & 4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & -u_2 \leq -6 \\ & u_1 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. Il punto $u = (3,\ 0)^T$ è ammissibile e ottimo per il problema duale.

VERO | FALSO **X**

4. Il problema duale è illimitato superiormente.

VERO **X** | FALSO

5. Il problema primale è illimitato inferiormente.

VERO | FALSO **X**

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**)Sia data la seguente funzione obiettivo

$$\min_{x_i, y_j} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} x_i \cdot x_j \cdot a_{i,j} - \sum_{i \in T} b_i \cdot y_i$$

dove N e T sono due generici insiemi, x_i e y_i costituiscono le variabili del problema mentre $a_{i,j}, b_i$ sono parametri. Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Una possibile dichiarazione dei parametri e delle variabili in AMPL è la seguente:

```
set N;
set T;
param a{N,N};
param b{T};
var x{N};
var y{T};
```

VERO **X** | FALSO

2. Una possibile traduzione AMPL della funzione obiettivo è la seguente:

```
minimize obiettivo:sum{i in N,j in N}x[i]*x[j]*a[i,j]-sum{k in T}b[k]*y[k];
```

VERO **X** | FALSO

3. Supponiamo che l'insieme N e l'insieme T abbiano i seguenti elementi

$$N = \{g, h, f\}, \quad T = \{i, l, m, n\}$$

e che la matrice a e il vettore b siano costituiti dai seguenti elementi:

allora una possibile definizione nel file `.dat` di a e b potrebbe essere la seguente:

```
param b:= i 3 l 1 m 2 n 2;
```

a	g	h	f
g	5	2	6
h	2	4	1
f	2	0	1

b	i	l	m	n
	3	1	2	2

```
param a:  g  h  f:=
       g  5  2  6
       h  2  4  1
       f  2  0  1;
```

VERO **X** FALSO

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} \; f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $\nabla^2 f(\bar{x}) \succ 0$, allora $\bar{x}$ è minimo globale.

   VERO FALSO **X**

2. Se $\nabla^2 f(\bar{x}) \not\succeq 0$ (non semidefinita positiva), allora $\bar{x}$ non può essere minimo locale.

   VERO **X** FALSO

3. Se in $\bar{x}$ risulta $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, si può sempre definire la direzione del metodo di Newton ed è di discesa.

   VERO FALSO **X**

4. Se un algoritmo per la minimizzazione non vincolata converge con rapidità di convergenza quadratica, allora converge anche con rapidità superlineare.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & Ax = b \\ & l \leq x \leq U \end{array}$$

con A matrice $m \times n$, b vettore in R^m, $l < U$ vettori di R^n entrambi finiti. Si supponga che il sistema $Ax = b$ ammetta soluzione. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema può NON avere soluzione

   VERO FALSO **X**

2. Se $f(x)$ è convessa, allora il problema è convesso.

   VERO FALSO **X**

3. Per il problema le condizioni di KKT si applicano solo nell'ipotesi di regolarità dei vincoli.

VERO	FALSO **X**

4. Per la soluzione del problema NON si può utilizzare un metodi di penalità sequenziale interna.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $b, x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO **X**	FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^*, allora il valore ottimo della funzione obiettivo del problema primale soddisfa $c^T\bar{x} \le c^T x^* \le b^T \bar{u}$, per ogni $\bar{x}, \bar{u}$ ammissibile rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T\bar{u} \ge c$, allora $b^T\bar{u} \le c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema duale è vuoto, allora il problema primale ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato.

VERO **X**	FALSO