

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:

ogni risposta CORRETTA vale **+1** PUNTO e

ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),

nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Per gli esercizi 5,6,7:

ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e

ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),

nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (Punteggio massimo = 5)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \frac{4}{3}x_1^3 - x_1^2x_3 + \frac{11}{6}x_3^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $(1, -5, 3)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO

X

FALSO

2. Il punto $(1, -5, 3)^T$ è un punto di minimo locale.

VERO

FALSO

X

3. L'approssimazione quadratica nell'intorno del punto $x^0 = (0, 0, -1)^T$ ammette un unico punto di minimo.

VERO

X

FALSO

4. Il passo $\alpha = \frac{1}{10}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (1, 0, 3)^T$ (valore di $\gamma = \frac{1}{2}$).

VERO

FALSO

X

5. La direzione di Newton nel punto $x^0 = (0, 0, -1)^T$ è $d = (-1, 0, 1)^T$.

VERO

FALSO

X

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO

X

FALSO

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di NON regolarità per i vincoli

VERO

FALSO

X

3. Il punto $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di *KKT*.

VERO

X

FALSO

4. Il punto $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ NON è l'unico punto di *KKT*.

VERO

FALSO

X

5. Se nel secondo vincolo il membro di destra varia da 1 a $1 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo la soluzione ottima NON migliora.

VERO

FALSO

X

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -2u_1 + 3u_2 + 4u_3 \\ & -u_1 + u_2 \geq 1 \\ & -2u_1 - u_2 + u_3 = 1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

X

FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -2u_1 + 3u_2 + 4u_3 \\ & -u_1 + u_2 \geq 1 \\ & -2u_1 - u_2 + u_3 \geq 1 \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO **X**

3. I punti $\bar{x} = (2, 2)^T$ e $\bar{u} = (0, 1, 2)^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale e risulta $4 \leq c^T x^* \leq 11$.

N.B. Considerare il problema primale nella forma di max corrispondente al duale del punto 1

VERO **X**

FALSO

4. Il problema duale non può essere illimitato inferiormente

VERO **X**

FALSO

5. Il punto $x^* = (7, 4)^T$ è ottimo per il problema primale.

VERO **X**

FALSO

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Sia dato il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (y_i y_j x_i x_j q_{ij}) - \sum_{k=1}^N x_k \\ & \sum_{i=1}^N y_i x_i = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \\ & x_i \leq C_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

(1)

dove x_i sono variabili, mentre y_i, q_{ij} e C_i sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Una possibile dichiarazione delle variabili e dei parametri del problema in AMPL è la seguente:

```
param N;  
param y{1..N};  
param C{1..N};  
param q{1..N,1..N};  
var x{1..N};
```

VERO **X**

FALSO

minimize obiettivo: $\sum\{i \text{ in } 1..N\}(\sum\{j \text{ in } 1..N\} (y[i]*y[j]*x[i]*x[j]*q[i,j]- x[j]));$

2. Una possibile dichiarazione della funzione obiettivo in AMPL è la seguente:

VERO FALSO

3. Una possibile dichiarazione dei vincoli del problema in AMPL è la seguente:

subj to uguaglianza {i in 1..N}: y[i]*x[i]=0;
 subj to box1{i in 1..N}: x[i]>=0;
 subj to box2{i in 1..N}:x[i]<=C[i];

VERO FALSO

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione $f(x)$ del tipo

$$\min_{R^n} \frac{1}{2}x^T Qx + \|x\|^2.$$

con Q matrice simmetrica $n \times n$ semidefinita positiva.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se \bar{x} è un punto tale che $\nabla f(\bar{x}) = 0$, allora \bar{x} è un minimo.

VERO FALSO

2. La funzione è quadratica e coerciva.

VERO FALSO

3. La funzione è strettamente convessa.

VERO FALSO

4. Il metodo del gradiente coniugato determina il minimo della funzione in al più n passi.

VERO FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & Ax = b \end{aligned}$$

con $f : R^n \rightarrow R$, $g : R^n \rightarrow R^m$, A matrice $p \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $g_i(x)$ sono convesse per ogni $i = 1, \dots, m$ allora il problema è convesso.

VERO FALSO

2. È possibile definire una funzione di pensalità interna per il problema dato.

VERO

FALSO **X**

3. Sia \bar{x} un punto ammissibile regolare. Se soddisfa le condizioni di KKT, allora \bar{x} è un minimo locale.

VERO

FALSO **X**

4. L'insieme ammissibile è regolare.

VERO

FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (P)$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

VERO **X**

FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^* , allora esiste una soluzione ammissibile \bar{x} del problema primale (P) tale che $c^T \bar{x} = b^T u^*$.

VERO

FALSO **X**

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} \geq -c$ e $\bar{u} \geq 0$, allora $-b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO **X**

FALSO

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO **X**

FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:

ogni risposta CORRETTA vale **1 PUNTO** e

ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),

nessuna risposta vale **0 PUNTI**.

Per gli esercizi 5,6,7:

ogni risposta CORRETTA vale **0,25 PUNTI** e

ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),

nessuna risposta vale **0 PUNTI**.

Esercizio 1. (Punteggio massimo = 5)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \frac{4}{3}x_1^3 - x_1^2x_3 + \frac{11}{6}x_3^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + x_2x_3 + 2x_1 + 2x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $(1, -10, 3)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO FALSO

2. Il punto $(1, -10, 3)^T$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

VERO FALSO

3. L'approssimazione quadratica nell'intorno del punto $x^0 = (1, 0, 0)^T$ è strettamente convessa.

VERO FALSO

4. Il passo $\alpha = \frac{1}{5}$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (1, 0, 3)^T$ (valore di $\gamma = \frac{1}{4}$).

VERO FALSO

5. La direzione di Newton nel punto $x^0 = (1, 0, 0)^T$ è $d = (-1, -2, 1)^T$.

VERO FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \geq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO

FALSO

X

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un punto di NON regolarità per i vincoli

VERO

FALSO

X

3. Il punto $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di *KKT*.

VERO

FALSO

X

4. Nel punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soddisfatta la condizione di stretta complementarità.

VERO

X

FALSO

5. Se nel secondo vincolo il membro di destra varia da 1 a $1 + \epsilon$ con $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo la soluzione ottima NON migliora.

VERO

X

FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 2u_1 - 3u_2 - 4u_3 \\ & u_1 - u_2 \leq 1 \\ & 2u_1 + u_2 - u_3 = 1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

X

FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 2u_1 - 3u_2 - 4u_3 \\ & u_1 - u_2 \leq 1 \\ & 2u_1 + u_2 - u_3 = 1 \\ & u_1 \geq 0. \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO **X**

3. I punti $\bar{x} = (0, 1)^T$ e $\bar{u} = (1, 1, 2)^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale e risulta $-9 \leq b^T u^* \leq 1$.

VERO **X**

FALSO

4. Il problema primale non può essere illimitato inferiormente

VERO **X**

FALSO

5. Il punto $u^* = (\frac{1}{2}, 0, 0)^T$ è ottimo per il problema duale.

VERO **X**

FALSO

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Sia dato il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (y_i y_j x_i x_j q_{ij}) - \sum_{k=1}^N x_k \\ & \sum_{i=1}^N y_i x_i = 0 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N \\ & x_i \leq C_i, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

(2)

dove x_i sono variabili, mentre y_i, q_{ij} e C_i sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Una possibile dichiarazione delle variabili e dei parametri del problema in AMPL è la seguente:

```
param N;  
param y{N};  
param C{N};  
param q{N,N};  
var x{N};
```

VERO

FALSO **X**

minimize obiettivo: $\sum\{i \text{ in } 1..N, j \text{ in } 1..N\} (y[i]*y[j]*x[i]*x[j]*q[i,j])$
 $- \sum \{k \text{ in } 1..N\} x[k];$

2. Una possibile dichiarazione della funzione obiettivo in AMPL è la seguente:

VERO FALSO

3. Una possibile dichiarazione dei vincoli del problema in AMPL è la seguente:

subj to uguaglianza: $\sum\{i \text{ in } 1..N\} y[i]*x[i]=0;$
 subj to box1 $\{i \text{ in } 1..N\}$: $x[i]>=0;$
 subj to box2 $\{i \text{ in } 1..N\}$: $x[i]<=C[i];$

VERO FALSO

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione $f(x)$ del tipo

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} \|Ax\|^2.$$

con A matrice $m \times n$.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se \bar{x} è un punto tale che $A\bar{x} = 0$, allora \bar{x} è un minimo.

VERO FALSO

2. La funzione è quadratica e convessa.

VERO FALSO

3. La matrice hessiana della funzione è $A^T A$.

VERO FALSO

4. Il metodo del gradiente determina il minimo della funzione in al più n passi.

VERO FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min & f(x) \\ & h(x) = 0 \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

con $f : R^n \rightarrow R, h : R^n \rightarrow R^p, A$ matrice $m \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_j(x)$ sono convesse per ogni $j = 1, \dots, p$ allora il problema è convesso.

VERO

FALSO **X**

2. È possibile definire una funzione di penalità esterna per il problema dato.

VERO

FALSO **X**

3. Se \bar{x} è un minimo locale soddisfa le condizioni di KKT, senza ipotesi di regolarità.

VERO

FALSO **X**

4. L'insieme ammissibile è regolare.

VERO

FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono n tutti di disuguaglianza

VERO

X

FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^* , allora anche il problema duale ammette soluzione ottima u^* e risulta $b^T u^* < c^T x^*$.

VERO

FALSO **X**

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} \leq c$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO

X

FALSO

4. Se il problema duale ha insieme ammissibile vuoto, allora il problema primale ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato.

VERO

FALSO **X**