

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONEPer gli **esercizi 1,2,3,4**:ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0** PUNTI.Per gli **esercizi 5,6,7**:ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0** PUNTI.**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \frac{1}{3}x_1^3 + 2x_2^4 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - \frac{1}{4}x_1 - x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $(0, \frac{1}{2})^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO

X

FALSO

2. Il punto $(0, \frac{1}{2})^T$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine

VERO

X

FALSO

3. È possibile affermare che il punto $(0, \frac{1}{2})^T$ è un minimo locale stretto.

VERO

X

FALSO

4. L'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $x^0 = (1, 1)^T$ ammette un unico punto di minimo.

VERO

X

FALSO

5. Nel punto $x^0 = (1, 1)^T$ il metodo di Newton puro definisce una direzione di discesa.

VERO

X

FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO FALSO

2. Per questo problema non si può utilizzare il teorema di Weierstrass per garantire l'esistenza di una soluzione globale.

VERO FALSO

3. Le condizioni necessarie di KKT NON richiedono la regolarità dei vincoli.

VERO FALSO

4. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT

VERO FALSO

5. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT

VERO FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 12x_2 + 12x_3 \\ & -2x_1 + 4x_2 - x_3 \geq -1 \\ & -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste) e sia $\bar{x} = (1, 1, 2)^t$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & -u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 - u_2 \leq 4 \\ & 4u_1 - 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 + 3u_2 \leq 12 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & -u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 - u_2 \leq 4 \\ & 4u_1 - 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO

3. Il punto $(2, 2)^T$ è ammissibile per il duale e si ha $c^T x^* \leq 2$.

VERO

FALSO

4. Si ha $c^T x^* \leq 40$

VERO

FALSO

5. I punti $x^* = (0, 0, \frac{2}{3})^T$ e $u^* = (0, 4)^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il problema duale.

VERO

FALSO

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_i^2 y_j + \sum_{j=1}^3 p_j y_j \\ & \sum_{j=1}^3 t_{ij} (x_i - y_j) \leq d_i \quad i = 1, \dots, 5 \\ & 0 \leq x_i \leq u_i \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre $d_i, u_i, p_j, c_{ij}, t_{ij}$ con $i = 1, \dots, 5$ $j = 1, \dots, 3$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param c{12345,123};
param d{12345};
param u{12345};
param t{12345,123};
param p{123};
var x{12345};
var y{123};
```

VERO

FALSO

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è corretta:

```
minimize obiettivo: sum{i in 1..5}sum{j in 1..3}(c[i,j]*x[i]**2*y[j])
                    +sum{j in 1..3}p[j]*y[j];
```

VERO

FALSO

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

s.t. v1: $\sum_{i=1..5} \sum_{j \text{ in } 1..3} t[i, j] * (x[i] - y[j]) \leq d[i]$;
s.t. box1{i in 1..5}: $x[i] \geq 0$;
s.t. box2{i in 1..5}: $x[i] \leq u[i]$;

VERO FALSO

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata della una funzione $f(x) = \frac{1}{2}x^T A^T A x + c^T x$ ovvero si consideri il problema

$$\min_{R^n} \frac{1}{2}x^T A^T A x + c^T x.$$

con $x \in R^n$, A matrice $m \times n$ e c vettore di R^n .

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è quadratica e convessa.

VERO FALSO

2. La funzione ammette minimo se e solo se esiste una soluzione del sistema $A^T A x = -c$.

VERO FALSO

3. La funzione può non avere minimi.

VERO FALSO

4. Il metodo del gradiente determina il minimo della funzione con rapidità di convergenza lineare.

VERO FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\min f(x)$$

$$h(x) = 0$$

con $f : R^n \rightarrow R$, $h : R^n \rightarrow R^p$, A matrice $m \times n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_i(x)$ sono lineari per ogni $i = 1, \dots, p$ allora il problema è convesso.

VERO FALSO

2. È possibile definire una funzione di penalità interna per il problema dato.

VERO FALSO

3. Sia \bar{x} un punto ammissibile NON regolare. Se \bar{x} è un minimo locale allora soddisfa le condizioni di KKT.

VERO FALSO

4. Sia \bar{x} un punto regolare che soddisfa le condizioni di KKT. Se l'insieme

$$\{d \in R^n : d \neq 0 \nabla h(\bar{x})^T d = 0\}$$

è vuoto, allora \bar{x} soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO **X** FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ & A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (P)$$

con A_1 matrice $m \times n_1$, A_2 matrice $m \times n_2$ e $x = (x_1, x_2) \in R^{n_1} \times R^{n_2}$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono $n_1 + n_2$ tutte vincolate ad essere non negative.

VERO **X** FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita, allora anche il problema primale ammette soluzione ottima finita.

VERO **X** FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A_1^T \bar{u} \geq c_1$ and $A_2^T \bar{u} = c_2$, allora $b^T \bar{u} \geq c^T x^*$.

VERO **X** FALSO

4. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A_1^T \bar{u} \leq c_1$ and $A_2^T \bar{u} = c_2$, $\bar{u} \geq 0$, allora $b^T \bar{u} \leq b^T u^*$.

VERO **X** FALSO

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (bianco)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2° anno

Cognome :

Nome :

VALUTAZIONEPer gli **esercizi 1,2,3,4**:ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0** PUNTI.Per gli **esercizi 5,6,7**:ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0** PUNTI.**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \frac{1}{3}x_1^3 + 2x_2^4 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - x_1 - x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $(1, 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.VERO FALSO 2. Il punto $(1, 0)^T$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordineVERO FALSO 3. È possibile affermare che il punto $(1, 0)^T$ è un minimo globale.VERO FALSO 4. L'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $(0, \frac{1}{2})^T$ è indefinita.VERO FALSO 5. Nel punto $(0, \frac{1}{2})^T$ è possibile definire la direzione di Newton.VERO FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & 0 \leq x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

VERO FALSO

2. Per questo problema si può utilizzare il teorema di Weierstrass per garantire l'esistenza di una soluzione globale.

VERO FALSO

3. L'insieme ammissibile non è regolare.

VERO FALSO

4. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT

VERO FALSO

5. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT

VERO FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + 12x_2 + 12x_3 \\ & -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ & -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste) e sia $\bar{x} = (0, 0, 1/4)$.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 3u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 - u_2 \leq 4 \\ & 4u_1 - 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 3u_1 + 2u_2 \\ & -2u_1 - u_2 \leq 4 \\ & 4u_1 - 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 + 3u_2 \leq 12 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO **X**

3. Il punto $\bar{u} = (0, 0)$ è ammissibile per il duale e si ha $c^T x^* \geq 0$.

VERO **X**

FALSO

4. Il problema duale è vuoto

VERO

FALSO **X**

5. I punti $(0, 11/9, 17/9)^T$ e $(8, 20/3)^T$ sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il problema duale.

VERO

FALSO **X**

Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_i^2 y_j + \sum_{j=1}^3 p_j y_j \\ & \sum_{j=1}^3 t_{ij} (x_i - y_j) \leq d_i \quad i = 1, \dots, 5 \\ & 0 \leq x_i \leq u_i \quad i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Dove x_i e y_j sono le variabili del problema mentre $d_i, u_i, p_j, c_{ij}, t_{ij}$ con $i = 1, \dots, 5$ $j = 1, \dots, 3$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param c{1..5, 1..3};
param d{1..5};
param u{1..5};
param t{1..5, 1..3};
param p{1..3};
var x{1..5};
var y{1..3};
```

VERO **X**

FALSO

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è corretta:

```
minimize obiettivo{j in 1..3}: sum{i in 1..5}(c[i,j]*x[i]**2*y[j])
+sum{j in 1..3}p[j]*y[j];
```

VERO

FALSO **X**

3. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

- s.t. $v1\{i=1..5\}$: $\sum\{j \text{ in } 1..3\}t[i,j]*(x[i]-y[j])\leq d[i]$;
s.t. $box1\{i \text{ in } 1..5\}$: $x[i]\geq 0$;
s.t. $box2\{i \text{ in } 1..5\}$: $x[i]\leq u[i]$;

VERO FALSO

Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata della una funzione $f(x) = \frac{1}{2}x^T A^T A x + c^T x$ ovvero si consideri il problema

$$\min_{R^n} \frac{1}{2}x^T A^T A x + c^T x.$$

con $x \in R^n$, A matrice $m \times n$ e c vettore di R^n .

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è quadratica con hessiano $\nabla^2 f(x) = A^T A$.

VERO FALSO

2. La funzione ammette minimo se e solo se esiste una soluzione del sistema $A^T A x = -c$.

VERO FALSO

3. La funzione può avere minimi locali non globali.

VERO FALSO

4. Il metodo del gradiente determina il minimo della funzione in un numero finito di passi a partire da un qualunque punto iniziale.

VERO FALSO

Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\min f(x) \\ h(x) = 0$$

con $f : R^n \rightarrow R$, $h : R^n \rightarrow R^p$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa e $h_i(x)$ sono convesse per ogni $j = 1, \dots, p$ allora il problema è convesso.

VERO FALSO

2. È possibile definire una funzione di penalità esterna per il problema dato.

VERO FALSO

3. Sia \bar{x} un punto ammissibile regolare. Se \bar{x} è un minimo locale allora soddisfa le condizioni di KKT.

VERO FALSO

4. Sia \bar{x} un punto che soddisfa le condizioni di KKT. Se l'insieme

$$\{d \in R^n : d \neq 0 \nabla h(\bar{x})^T d = 0\}$$

è vuoto, allora \bar{x} è un minimo locale stretto.

VERO FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \\ & A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \\ & x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (P)$$

con A_1 matrice $m \times n_1$, A_2 matrice $m \times n_1$ e $x = (x_1, x_2)^T \in R^{n_1} \times R^{n_2}$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m , e tutte non vincolate in segno.

VERO FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^* , allora esiste una soluzione ammissibile \bar{x} del problema primale.

VERO FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A_1^T \bar{u} = c_1$, $A_2^T \bar{u} \leq c_2$, allora $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO FALSO

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO FALSO