ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – 2º anno

Cognome : **Nome** : **Voto previsto** :

Questo foglio NON deve essere consegnato e' serve per poter effettuare un'**AUTOVALUTAZIONE** seguendo i seguenti criteri:
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*punteggio massimo = 5, punteggio minimo =-2.5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \; 2x_1^2 + 3x_2^3 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2 + 4x_1 + x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO | FALSO **X**

2. Il punto $(-1,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** | FALSO

3. Il punto $(-1,\ 0)^T$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

   VERO | FALSO **X**

4. Nel punto $(0,\ 0)^T$ è sempre possibile definire una direzione di discesa.

   VERO **X** | FALSO

5. Nel punto $x^0 = (0,\ 0)^T$, il passo $\alpha = 1$ NON soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente qualunque sia il valore di $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$.

   VERO **X** | FALSO

Esercizio 2 . (*punteggio massimo = 5, punteggio minimo =-2.5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min\ \ & x_1 \\ & (x_1-1)^2 + x_2^2 \le 1 \\ & x_1 + x_2^2 \ge 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

   | VERO | | FALSO **X** |

2. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT

   | VERO **X** | | FALSO |

3. È possibile affermare che il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un minimo locale.

   | VERO | | FALSO **X** |

4. Il punto $\begin{pmatrix} 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

   | VERO | | FALSO **X** |

5. Se nel primo vincolo a 1 si sostituisce 0.9 la soluzione migliora

   | VERO | | FALSO **X** |

Esercizio 3. (*punteggio massimo = 5, punteggio minimo =-2.5*)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max\ \ & 2x_1 + x_2 \\ & -x_1 + x_2 \le 0 \\ & x_1 - 2x_2 \le 2 \\ & -x_1 - x_2 \le -2 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste) e sia $\bar{x} = (3,\ 2)^T$ un punto ammissibile.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min\quad & 2y_2 - 2y_3 \\ & -y_1 + y_2 - y_3 = 2 \\ & y_1 - 2y_2 - y_3 = 1 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0, \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X** FALSO

2. Il valore ottimo, se esiste, del problema primale soddisfa $c^T x^* \geq 8$.

VERO **X** FALSO

3. Il punto $\bar{x} = (2,\ 0)^T$ è ottimo per il primale.

VERO FALSO **X**

4. Il problema primale è illimitato.

VERO **X** FALSO

5. Il problema duale è vuoto.

VERO **X** FALSO

Esercizio 4. (*punteggio massimo = 3, punteggio minimo =-1.5*) Sia dato il seguente file:

ex.mod

```
set RIGHE;
set COLONNE;
param A{RIGHE, COLONNE};
param B{COLONNE};
var x{COLONNE}>=0;
minimize obiettivo:  1+sum{j in COLONNE}x[j];
s.t.  VINC{j in COLONNE}:sum{i in RIGHE}A[i,j]*x[j]<=B[j];
s.t.  UB{j in COLONNE}:x[j]<=10;
```

e il seguente file

ex.dat

```
set RIGHE:=1..3;
set COLONNE:=1..4;
param A: 1 2 3 4:=
1 4 2.25 1 0.25
2 0.16 0.36 0.64 0.64
3 0.3 0.4 0.4 0.6 ;
param B:=
1 0.2
2 0.3
3 0.1
4 0.5;
```

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema ha tante variabili quanti sono gli elementi dell'insieme COLONNE.

VERO **X** FALSO

2. Il problema ha 2 vincoli.

VERO ☐ FALSO **X**

3. Il primo gruppo di vincoli è:

$$\sum_{i=1}^{3} A_{i,j} x_j \leq b_j, \quad j = 1, \ldots, 4$$

VERO **X** FALSO ☐

Esercizio 5. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata

$$\min_{x \in R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + \varepsilon x^T x$$

con Q matrice simmetrica $n \times n$ e ε costante strettamente positiva, $x \in R^n$.

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa per qualunque valore di $\varepsilon \geq 0$.

VERO ☐ FALSO **X**

2. Se Q è definita positiva, il punto $\bar{x} = 0$ è l'unico punto stazionario per qualunque valore di $\varepsilon \geq 0$.

VERO **X** FALSO ☐

3. La funzione è quadratica con matrice hessiana è $Q + 2\varepsilon I$ dove I indica la matrice identità $n \times n$.

VERO **X** FALSO ☐

4. Il metodo del gradiente con ricerca di linea esatta converge al minimo della funzione in un numero finito di passi, per qualunque valore di $\varepsilon \geq 0$ e qualunque matrice Q.

VERO ☐ FALSO **X**

Esercizio 6. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax = b \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, $g : R^n \to R^m$, A matrice $m \times n$, $x \in R^n$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $g_i(x)$ sono funzioni convesse per $i = 1, \ldots, m$, allora l'insieme ammissibile è convesso.

VERO **X** FALSO ☐

2. Il problema si può risolvere utilizzando un metodo basato su un Lagrangiano aumentato.

VERO **X**	FALSO

3. Le condizioni necessarie di KKT richiedono la regolarità dei vincoli.

VERO **X**	FALSO

4. La matrice hessiana del Lagrangiano $L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \mu^T(Ax - b) + \lambda^T g(x)$, risulta essere $\nabla^2 L(x, \mu, \lambda) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 g_i(x)$.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*punteggio massimo = 1, punteggio minimo =-1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & A_1 x \leq b_1 \\ & A_2 x \geq b_2 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$. Si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Il problema duale ha $m_1 + m_2$ variabili duali di cui solo m_1 sono vincolate in segno.

VERO	FALSO **X**

2. Un punto $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in R^{m_1+m_2}$ tale che $-A_1^T \bar{u}_1 + A_2^T \bar{u}_2 \leq c$, $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \geq 0$, è ammissibile per il duale.

VERO **X**	FALSO

3. Un punto $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in R^{m_1+m_2}$ tale che $A_1^T \bar{u}_1 + A_2^T \bar{u}_2 = c$, $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \geq 0$, è ammissibile per il duale.

VERO	FALSO **X**

4. Se $\bar{x}$ è una soluzione ammissibile per il primale e $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in R^{m_1+m_2}$ è una soluzione ammissibile per il duale e risulta $c^T \bar{x} = b_1^T \bar{u} + b_2^T \bar{u}_2$, allora $\bar{x}$, $\bar{u}$ sono ottimi.

VERO	FALSO **X**