

**ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)**Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome :

Nome :

**VALUTAZIONE**

Per gli esercizi 1,2,3,4:

le risposte CORRETTE valgono **1 PUNTO** e  
quelle SBAGLIATE **-0.5 PUNTI** (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7:

le risposte CORRETTE valgono **0,25 PUNTI** e  
quelle SBAGLIATE **-0.25 PUNTI** (VALORE NEGATIVO).**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 x_1 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_1 - 4x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in  $\mathfrak{R}^2$ .

VERO

FALSO **X**2. Il punto  $(0, 1)^T$  soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.VERO **X**

FALSO

3. Il punto  $(0, 1)^T$  è un minimo locale stretto.VERO **X**

FALSO

4. L'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto  $(1, -1)^T$  è strettamente convessa.

VERO

FALSO **X**5. Nel punto  $(1, -1)^T$  la direzione  $d = (0, 1)^T$  è di discesa e il metodo del gradiente con ricerca di linea di Armijo accetta passo  $\alpha = 1$  (per ogni valore del parametro  $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ )

VERO

FALSO **X**

**Esercizio 2** (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_2 \geq x_1^2 \\ & x_2 \leq x_1^2 + 1 \\ & x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO

FALSO

2. Il punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  è di regolarità per i vincoli

VERO

FALSO

3. Il punto  $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$  soddisfa le condizioni di *KKT*.

VERO

FALSO

4. I moltiplicatori  $\lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5/4$  associati rispettivamente al primo, secondo e terzo vincolo, non soddisfano le condizioni di *KKT*

VERO

FALSO

5.

6. Il punto  $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$  non soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO

FALSO

**Esercizio 3.** (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 4 \\ & -x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 4u_1 - u_2 \\ & u_1 \leq \frac{1}{2} \\ & 6u_1 - u_2 \leq -6 \\ & u_1 + u_2 \leq 2 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 4u_1 - u_2 \\ & 6u_1 - u_2 \leq -6 \\ & u_1 + u_2 \leq 2 \\ & 2u_1 \leq 1 \\ & u_1 \geq 0, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO **X**

3. I punti  $\bar{x} = (1, 2, 0)^T$  e  $\bar{u} = (-1, 0)^T$  sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale ma non ottimi.

VERO **X**

FALSO

4. Risulta  $-4 \leq c^T x^* \leq 5$

VERO **X**

FALSO

5. Il punto  $u^* = (1/2, 0)^T$  è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima per il problema primale.

VERO

FALSO **X**

#### Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3)

Sia dato il seguente vincolo lineare:

$$\sum_{i \in T} x_i \cdot a_i - \sum_{j \in S} y_j \leq 0$$

dove  $x_i$  e  $y_j$  sono le variabili del generico problema, mentre  $a_i$  sono parametri.

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Supponendo che siano stati correttamente dichiarati tutti gli insiemi, i parametri e le variabili, la seguente traduzione AMPL del vincolo nel file .mod è corretta:

s.t. vincolo{i in T,j in S}:x[i]\*a[i]-y[j]<=0;

VERO

FALSO **X**

2. Supponendo che siano stati correttamente dichiarati tutti gli insiemi, i parametri e le variabili, la seguente traduzione AMPL dei vincoli nel file .mod è corretta:

s.t. vincolo:sum{i in T} (x[i]\*a[i])- sum {j in S}y[j]<=0;

VERO **X**

FALSO

3. Supponiamo che l'insieme  $S$  abbia i seguenti elementi:

$$S = \{C, D\}$$

mentre i parametri  $b$  e  $c$  abbiano i valori riportati in tabella:

	C	D
b	9	10
c	7	8

Si abbia inoltre nel file .mod la seguente dichiarazione:

```
set S;
param b{S};
param c{S};
```

allora una possibile definizione dell'insieme  $S$  e dei parametri  $b$  e  $c$  nel file .dat è la seguente:

```
set S:= C D;
```

```
param: b c:=
C      9  7
D      10 8;
```

VERO  FALSO

**Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)**

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $\bar{x}$  è un punto tale che  $Q\bar{x} + c = 0$ , allora  $\bar{x}$  è minimo locale.

VERO  FALSO

2. Se  $Q \succ 0$  (definita positiva) il metodo del gradiente con ricerca di linea esatta ha la forma

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\nabla f(x^k)^T Q \nabla f(x^k)} \nabla f(x^k).$$

VERO  FALSO

3. Se  $Q \succeq 0$  (è semidefinita positiva), esiste sempre una soluzione al problema  $\min_{R^n} f(x)$ .

VERO  FALSO

4. Se  $d^0, \dots, d^{n-1}$  sono direzioni coniugate tra loro, sono anche sempre direzioni di discesa.

VERO  FALSO

**Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)**

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\max f(x)$$

$$g(x) \leq 0$$

con  $g : R^n \rightarrow R^m$ . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $f(x)$  è convessa e risulta per ogni  $j = 1, \dots, m$ :

$$g_j(y) \geq g_j(x) + \nabla g_j(x)^T (y - x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

allora il problema è convesso.

VERO

FALSO **X**

2. La funzione

$$-f(x) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m \|g_i(x)\|^2$$

è una funzione di penalità esterna per il problema.

VERO

FALSO **X**

3. Sia  $\bar{x}$  un punto ammissibile NON regolare. Se soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine, allora  $\bar{x}$  è un minimo locale stretto.

VERO **X**

FALSO

4. Se in un punto ammissibile  $\bar{x}$  i vincoli attivi  $g_i(\bar{x}) = 0$  sono in numero inferiore ad  $n$ , allora il punto è regolare.

VERO

FALSO **X**

**Esercizio 7.** (Punteggio massimo = 1) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

con  $A$  matrice  $m \times n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  e si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono  $m$  tutte vincolate ad essere non negative.

VERO **X**

FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita  $u^*$ , allora il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale è  $c^T x^*$ .

VERO **X**

FALSO

3. Se  $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$  è un punto tale che  $A^T \bar{u} = c$ , allora  $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$ .

VERO

FALSO **X**

4. Se il problema primale è illimitato superiormente, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO **X**

FALSO

**ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (verde)**Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome :

Nome :

**VALUTAZIONE**

Per gli esercizi 1,2,3,4:

le risposte CORRETTE valgono **1 PUNTO** e  
quelle SBAGLIATE **-0.5 PUNTI** (VALORE NEGATIVO).

Per gli esercizi 5,6,7:

le risposte CORRETTE valgono **0,25 PUNTI** e  
quelle SBAGLIATE **-0.25 PUNTI** (VALORE NEGATIVO).**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 x_1 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_1 - 4x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione non è convessa in
- $\mathbb{R}^2$
- .

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

2. Il punto
- $(0, 1)^T$
- soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

3. Il punto
- $(0, 1)^T$
- è un punto di sella.

VERO	FALSO	<b>X</b>
------	-------	----------

4. L'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto
- $(1, 1)^T$
- è strettamente convessa.

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

5. Nel punto
- $x^0 = (1, 1)^T$
- una ricerca di linea esatta lungo
- $d = (1, 0)^T$
- determina un passo
- $\alpha^* = -1$
- .

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

**Esercizio 2** (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_2 \geq x_1^2 \\ & x_2 \leq x_1^2 + 1 \\ & x_2 \leq 4 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.
2. Il punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  è di regolarità per i vincoli
3. Il punto  $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$  non soddisfa le condizioni di *KKT*.
4. I moltiplicatori  $\lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 5/4$  associati rispettivamente al primo, secondo e terzo vincolo, soddisfano le condizioni di *KKT*
5. Il punto  $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}$  soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

**Esercizio 3.** (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 4 \\ & -x_2 + x_3 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 4u_1 - u_2 \\ & u_1 \leq \frac{1}{2} \\ & 6u_1 - u_2 \leq -6 \\ & u_1 + u_2 \leq 2 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

-

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 4u_1 - u_2 \\ & u_1 \leq \frac{1}{2} \\ & 6u_1 - u_2 \leq -6 \\ & u_1 + u_2 \leq 2 \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO

**X**

3. I punti  $\bar{x} = (1, 2, 0)^T$  e  $\bar{u} = (-1, 0)^T$  sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO

FALSO

**X**

4. Sia  $u^*$  la soluzione ottima del problema duale, risulta  $-4 \leq b^T u^* \leq 5$

VERO

**X**

FALSO

5. Il punto  $u^* = (1/2, 0)^T$  è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima  $x^*$  per il problema primale tale che  $c^T x^* = 2$ .

VERO

**X**

FALSO

**Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3)** Siano dati i seguenti vincoli lineari:

$$\sum_{i \in T} x_i \cdot a_i - y_k \leq c_k, \quad \forall k \in S$$

dove  $x_i$  e  $y_k$  sono le variabili del generico problema, mentre  $a_i$  e  $c_k$  sono parametri.

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Supponendo che siano stati correttamente dichiarati tutti gli insiemi, i parametri e le variabili, la seguente traduzione AMPL dei vincoli nel file .mod è corretta:

s.t. vincoli{k in S}: sum{ i in T} (x[i]\*a[i])-y[k]<=c[k];

VERO

**X**

FALSO

2. Supponendo che siano stati correttamente dichiarati tutti gli insiemi, i parametri e le variabili, la seguente traduzione AMPL dei vincoli nel file .mod è corretta:

s.t. vincoli{i in T,k in S}: (x[i]\*a[i])-y[k]<=c[k];

VERO

FALSO

**X**

3. Si Supponga che nel file .mod si abbia la seguente dichiarazione:

```
set T;  
set S;  
param a symbolic in T;  
param b symbolic in T;
```

allora una possibile assegnazione dei parametri a e b, nel file .dat, è la seguente:

```
set T:= A B;  
set S:= F G;
```

param a:=A;  
param b:=F;

VERO

FALSO **X**

**Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)**

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione quadratica

$$\min_{R^n} \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x.$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $\bar{x}$  è un punto tale che  $Q\bar{x} + c = 0$  e  $Q \succeq 0$  (semidefinita positiva), allora  $\bar{x}$  è un minimo globale.

VERO **X**

FALSO

2. Se  $Q \succ 0$  (definita positiva) il metodo delle direzioni coniugate con ricerca di linea esatta ha la forma

$$x^{k+1} = x^k - \frac{\nabla f(x^k)^T d^k}{d^{kT} Q d^k} d^k.$$

VERO **X**

FALSO

3. Se  $Q \succ 0$  (è definita positiva), esiste sempre una soluzione al problema  $\min_{R^n} f(x)$ .

VERO **X**

FALSO

4. Dato un punto  $x^k$  tale che  $\nabla f(x^k) \neq 0$ , il passo  $\alpha^k$  ottenuto con una qualunque ricerca di linea lungo la direzione del metodo del gradiente è sempre positivo.

VERO **X**

FALSO

**Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)**

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\min \begin{array}{l} f(x) \\ g(x) \leq 0 \end{array}$$

con  $g : R^n \rightarrow R^m$ . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $f(x)$  è convessa e risulta per ogni  $j = 1, \dots, m$ :

$$g_j(y) \leq g_j(x) + \nabla g_j(x)^T (y - x), \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^n$$

allora il problema è convesso.

VERO

FALSO **X**

2. La funzione

$$f(x) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m \| -g_i(x) \|^2$$

è una funzione di penalità esterna per il problema.

VERO

FALSO **X**

3. Sia  $\bar{x}$  un punto ammissibile e regolare. Se non soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine, allora  $\bar{x}$  non è un minimo.

VERO  FALSO

4. Se in un punto ammissibile  $\bar{x}$  i vincoli attivi  $g_i(\bar{x}) = 0$  sono in numero inferiore ad  $m$ , allora il punto è regolare.

VERO FALSO

**Esercizio 7.** (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con  $A$  matrice  $m \times n$  e  $x \in R^n$  e si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili del problema duale sono  $m$  tutte vincolate ad essere non negative.

VERO FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita  $x^*$ , allora esiste un punto ammissibile duale  $\bar{u}$  tale che  $c^T x^* = b^T \bar{u}$ .

VERO  FALSO

3. Se  $\bar{u} \in R^m$  è un punto tale che  $A^T \bar{u} \geq c$ , allora  $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$ .

VERO FALSO

4. Se il problema primale ha insieme ammissibile vuoto, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO FALSO