

**ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)**Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome :

Nome :

**VALUTAZIONE**

Per gli esercizi 1,2,3,4:

ogni risposta CORRETTA vale **1 PUNTO** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.

Per gli esercizi 5,6,7:

ogni risposta CORRETTA vale **0,25 PUNTI** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min 2x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_3 + 4x_1 + 2x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in
- $\mathfrak{R}^3$
- .

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

2. Il punto
- $(-1, -1, 0)^T$
- soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

3. Il punto
- $(-1, -1, 0)^T$
- è un minimo locale stretto.

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

4. Nel punto
- $x^0 = (-1, 1, 0)^T$
- il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione del metodo del gradiente è
- $\alpha^* = \frac{5}{13}$

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

5. Le direzioni
- $d^0 = (0, 4, 2)^T$
- e
- $d^1 = (5, 1, 0)^T$
- sono coniugate tra loro.

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

**Esercizio 2** (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_2 \geq x_1^2 \\ & x_2 \leq 1 - x_1^2 \\ & x_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO

FALSO

2. Il punto  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$  è di regolarità per i vincoli

VERO

FALSO

3. Il punto  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$  soddisfa le condizioni di *KKT*.

VERO

FALSO

4. I moltiplicatori  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$  associati rispettivamente al primo, secondo e terzo vincolo, non soddisfano le condizioni di *KKT*

VERO

FALSO

5. Se nel terzo vincolo a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  si sostituisce  $\frac{2}{\sqrt{2}}$ , la soluzione ottima migliora.

VERO

FALSO

**Esercizio 3.** (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - x_2 \\ & -2x_1 - 3x_2 \leq -12 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -12u_1 - 8u_2 \\ & -2u_1 - 2u_2 \geq -1 \\ & -3u_1 - u_2 \geq -1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 12u_1 + 8u_2 \\ & 2u_1 + 2u_2 \leq 1 \\ & 3u_1 + u_2 \leq 1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

**X**

FALSO

3. I punti  $\bar{x} = (0, 6)^T$  e  $\bar{u} = (0, \frac{1}{2})^T$  sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale ma non ottimi.

VERO

**X**

FALSO

4. Risulta  $-6 \leq c^T x^* \leq 4$

VERO

**X**

FALSO

5. La coppia  $x^* = (3, 2)^T$ ,  $u^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$  è ottima rispettivamente per il problema primale il per il problema duale.

VERO

**X**

FALSO

**Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3)** Siano  $x_i$  con  $i \in INS$  le variabili di un generico problema e supponiamo di dover dichiarare in AMPL i seguenti vincoli

$$0 \leq x_i \leq Upper, \quad \forall i \in INS$$

dove *Upper* è un parametro.

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Le seguenti istruzioni, nel file .mod, sono corrette

```
set INS;
var x{INS}>=0,<=Upper;
param Upper;
:
```

VERO

FALSO

**X**

2. Le seguenti istruzioni, nel file .mod, sono corrette

```
set INS;
param Upper;
var x{INS};
:
s.t. vinc1{i in INS}:x[i]>=0;
s.t. vinc2{i in INS}:x[i]<=Upper;
```

VERO

**X**

FALSO

3. Le seguenti istruzioni, nel file .mod, sono corrette

```
set INS;  
param Upper;  
var x{INS}<=Upper;  
:  
s.t. vinc1{i in INS}:x[i]>=0;
```

VERO  FALSO

**Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)**

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $\bar{x}$  è un punto tale che  $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ , allora  $\bar{x}$  non è minimo locale.

VERO  FALSO

2. Se  $\bar{x}$  è minimo locale, allora  $\nabla^2 f(\bar{x}) \succ 0$  (definita positiva).

VERO  FALSO

3. Se in  $\bar{x}$  risulta  $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ , si può sempre definire la direzione di Newton ed è di discesa.

VERO  FALSO

4. Se un algoritmo per la minimizzazione non vincolata converge con rapidità di convergenza quadratica, allora trova il minimo in due passi.

VERO  FALSO

**Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)**

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\min f(x) \\ h(x) = 0$$

con  $h : R^n \rightarrow R^p$ . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $f(x)$  è convessa e  $h_i(x)$  sono convesse per ogni  $j = 1, \dots, p$  allora il problema è convesso.

VERO  FALSO

2. La funzione

$$f(x) + \epsilon \sum_{i=1}^m \log(h_i(x))$$

è una funzione di penalità interna per il problema.

VERO  FALSO

3. Sia  $\bar{x}$  un punto ammissibile NON regolare. Se soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine, allora  $\bar{x}$  è un minimo locale stretto.

VERO  FALSO

4. Se  $p > n$ , allora l'insieme ammissibile non è regolare.

VERO  FALSO

**Esercizio 7.** (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (P)$$

con  $A$  matrice  $m \times n$  e  $x \in R^n$  e si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono  $m$  tutte vincolate ad essere non negative.

VERO  FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita  $u^*$ , allora esiste una soluzione ammissibile  $\bar{x}$  del problema primale (P) tale che  $c^T \bar{x} = b^T u^*$ .

VERO  FALSO

3. Se  $\bar{u} \in R^m$  è un punto tale che  $A^T \bar{u} \geq -c$  e  $\bar{u} \geq 0$ , allora  $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$ .

VERO  FALSO

4. Se il problema primale è vuoto, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO  FALSO

**ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (verde)**Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2° anno**

Cognome :

Nome :

**VALUTAZIONE**

Per gli esercizi 1,2,3,4:

ogni risposta CORRETTA vale **1 PUNTO** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.

Per gli esercizi 5,6,7:

ogni risposta CORRETTA vale **0,25 PUNTI** eogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25 PUNTI** (VALORE NEGATIVO),nessuna risposta vale **0 PUNTI**.**Esercizio 1.** (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min 2x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2 - x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è coerciva in
- $\mathbb{R}^3$
- .

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

2. Il punto
- $(1, -5, 6)^T$
- non soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO	FALSO	<b>X</b>
------	-------	----------

3. Il punto
- $(1, -5, 6)^T$
- è l'unico punto di minimo globale.

VERO	<b>X</b>	FALSO
------	----------	-------

4. Nel punto
- $x^0 = (-1, 1, 0)^T$
- il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione del metodo del gradiente è
- $\alpha^* = \frac{6}{19}$

VERO	FALSO	<b>X</b>
------	-------	----------

5. Le direzioni
- $d^0 = (2, -4, -2)^T$
- e
- $d^1 = (1, 1, 0)^T$
- NON sono coniugate tra loro.

VERO	FALSO	<b>X</b>
------	-------	----------

**Esercizio 2** (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_2 \geq x_1^2 \\ & x_2 \leq 1 - x_1^2 \\ & x_1 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema non è convesso.

VERO

FALSO

**X**

2. Il punto  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$  non è di regolarità per i vincoli

VERO

**X**

FALSO

3. Il punto  $\left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right)$  non soddisfa le condizioni di *KKT*.

VERO

**X**

FALSO

4. I moltiplicatori  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$  associati rispettivamente al primo, secondo e terzo vincolo, soddisfano le condizioni di *KKT*

VERO

**X**

FALSO

5. Se nel terzo vincolo a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  si sostituisce  $\frac{2}{\sqrt{2}}$ , la soluzione ottima non migliora.

VERO

**X**

FALSO

**Esercizio 3.** (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 - x_2 \\ & -2x_1 - 3x_2 \leq -12 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & 12u_1 + 8u_2 \\ & 2u_1 + 2u_2 = 1 \\ & 3u_1 + u_2 \leq 1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

**X**

FALSO

2. Il problema  
3. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -12u_1 - 8u_2 \\ & -2u_1 - 2u_2 \geq -1 \\ & -3u_1 - u_2 \geq -1 \\ & u_1 \geq 0, \quad u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO

FALSO **X**

4. I punti  $\bar{x} = (-1, 10)^T$  e  $\bar{u} = (0, \frac{1}{2})^T$  sono ottimi rispettivamente per il problema primale e per il duale.

VERO

FALSO **X**

5. Sia  $u^*$  la soluzione ottima del problema duale, risulta  $-9 \leq b^T u^* \leq -4$

VERO **X**

FALSO

6. Il punto  $u^* = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$  è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima  $x^*$  per il problema primale.

VERO **X**

FALSO

**Esercizio 4. (Punteggio massimo = 3)** Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Sia data la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in T} \sum_{j \in S} x_{ij}^3$$

Supponendo di aver dichiarato insiemi e variabili nel seguente modo:

```
set T;
set S;
var x{T,S};
```

una possibile traduzione AMPL della funzione obiettivo è la seguente:

```
minimize funzione:sum{i in T,j in S}(x[i,j]**3);
```

VERO **X**

FALSO

2. Siano dati i seguenti vincoli:

$$\sum_{i \in T} x_{ij} + y_j = 1, \quad \forall j \in S$$

dove  $x_{ij}$  e  $y_j$  sono variabili. Supponendo di aver correttamente dichiarato insiemi e variabili un possibile modo per esprimere tali vincoli in AMPL è il seguente

```
s.t. vincoli{i in T, j in S}:x[i,j]+y[j]=1;
```

VERO

FALSO **X**

<i>par</i>	A	B	C
D	4	5	20
E	3	12	1

3. Si Supponga che i due insiemi  $T$  e  $S$  siano definiti come segue:

$$T = \{A, B, C\}$$

$$S = \{D, E\}$$

Sia dato un parametro  $par$  i cui valori sono riportati nella seguente tabella:

Supponendo che nel file .mod si abbia la seguente dichiarazione

```
set T;
set S;
param par{T,S};
```

allora una possibile assegnazione del parametro  $par$  è la seguente:

```
set T:=A B C;
set S:=D E;
param par:= A D 4   A E 3   B D 5   B E 12   C D 20   C E 1;
```

VERO  FALSO

### Esercizio 5. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $\bar{x}$  è un punto tale che  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ , allora  $\bar{x}$  è minimo locale.

VERO  FALSO

2. Se  $\nabla^2 f(\bar{x}) \not\geq 0$  (semidefinita positiva), allora  $\bar{x}$  non è minimo locale.

VERO  FALSO

3. Se in  $\bar{x}$  risulta  $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ , si può sempre definire la direzione del metodo gradiente ed è di discesa.

VERO  FALSO

4. Se un algoritmo per la minimizzazione non vincolata converge con rapidità di convergenza superlineare, allora converge anche con rapidità quadratica.

VERO  FALSO

### Esercizio 6. (Punteggio massimo = 1)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\max f(x)$$

$$h(x) = 0$$

con  $h : R^n \rightarrow R^p$ . Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se  $f(x)$  è convessa e  $h_i(x)$  sono lineari per ogni  $j = 1, \dots, p$  allora il problema è convesso.

VERO

FALSO **X**

2. La funzione

$$-f(x) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m h_i^2(x)$$

è una funzione di penalità esterna per il problema.

VERO **X**

FALSO

3. Sia  $\bar{x}$  un punto ammissibile regolare. Se soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine, allora  $\bar{x}$  è un minimo locale.

VERO

FALSO **X**

4. Se  $p \leq n$ , allora l'insieme ammissibile è sempre regolare.

VERO

FALSO **X**

**Esercizio 7.** (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

con  $A$  matrice  $m \times n$  e  $x \in R^n$  e si indichi con  $x^*$  la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono  $m$  tutte vincolate ad essere non negative.

VERO

FALSO **X**

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita  $x^*$ , allora il valore ottimo della funzione obiettivo del problema duale è  $< c^T x^*$ .

VERO

FALSO **X**

3. Se  $\bar{u} \in R^m$  è un punto tale che  $A^T \bar{u} \geq c$ , allora  $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$ .

VERO

FALSO **X**

4. Se il problema duale è vuoto, allora il problema primale ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato.

VERO **X**

FALSO