ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE

Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta CORRETTA vale **1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 + \sqrt{2}x_2x_3 + \sqrt{2}x_2 + 4x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa in $\Re^3$.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ -2)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

3. Il punto $(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ -2)^T$ è un minimo globale.

   VERO **X** FALSO

4. Nel punto $x^0 = (-1,\ 0,\ -1)^T$ il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione $d = (2,\ 0,\ 1)^T$ è $\alpha^* = \frac{1}{3}$.

   VERO **X** FALSO

5. Nel punto $x^0 = (-1,\ 0,\ -1)^T$ una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente accetta passo $\alpha = 1$ per ogni $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & -x_1^2 \le x_2 \le x_1^2 \\ & -1 \le x_1 \le 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è di regolarità per i vincoli

VERO	FALSO **X**

2. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

3. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

4. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO **X**	FALSO

5. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è una soluzione globale.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 6u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \ge -4 \\ & u_1 + u_2 \ge 1 \\ & u_1 + u_2 \ge -2 \\ & u_1 \ge 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO **X**	FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \min & 6u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \geq -4 \\ & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & u_1 + u_2 \geq -2 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO	FALSO **X**

3. I punti $\bar{x} = (0,\ 4,\ 2)^T$ e $\bar{u} = (1,\ 0)^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale e risulta $0 \leq c^T x^* \leq 6$.

VERO	FALSO **X**

4. Il punto $u^* = (0,\ 1)^T$ è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima per il problema primale.

VERO **X**	FALSO

5. Il problema primale è vuoto.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Sia data la seguente funzione obiettivo:

$$\min \sum_{i \in T} \sum_{j \in S} \sqrt{x_{ij}}$$

Supponendo di aver dichiarato insiemi e variabili nel seguente modo:

```
set T;
set S;
var x{T,S};
```

una possibile traduzione AMPL della funzione obiettivo è la seguente:

```
minimize funzione:sum{i in S,j in T}sqrt(x[i,j]);
```

VERO	FALSO **X**

2. Siano dati i seguenti vincoli:

$$\sum_{j \in S} y_j - c_i = 1 \quad ,\forall i \in T$$

dove c_i sono parametri, mentre y_j sono variabili, allora le seguenti istruzioni AMPL per esprimere tali vincoli sono corrette:

```
set T;
set S;
param c{T};
var y{S};
⋮
s.t.  vincoli{i in T}:sum{j in S}y[j]-c[i]=1;
```

VERO **X**	FALSO

3. Si Supponga che i due insiemi T e S siano definiti come segue:

$$T = \{D, E, F\}$$
$$S = \{A, B, C\}$$

Sia dato un parametro *par* i cui valori sono riportati nella seguente tabella:

par	D	E	F
A	4	5	4
B	3	12	2
C	6	1	11

Supponendo che nel file .mod si abbia la seguente dichiarazione

```
set T;
set S;
param par{S,T};
```

allora una possibile assegnazione del parametro *par* è la seguente:

```
set T:=D E F;
set S:=A B C;

param par:  A  B   C:=
         D  4  5   4
         E  3  12  2
         F  6  1   11
```

VERO	FALSO **X**

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} \; f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\bar{x}$ è un punto tale che $\nabla^2 f(\bar{x}) \not\succeq 0$ (non è semidefinita positiva), allora $\bar{x}$ non è minimo locale.

VERO **X**	FALSO

2. Se $\bar{x}$ è un minimo globale, allora $\nabla^2 f(\bar{x}) \succ 0$ (definita positiva).

VERO	FALSO **X**

3. Se in $\bar{x}$ risulta $\nabla^2 f(\bar{x}) \succeq 0$, si può sempre definire la direzione di Newton ed è di discesa.

VERO	FALSO **X**

4. Il punto x^{k+1} generato a partire da x^k lungo la direzione d^k utilizzando una ricerca di linea esatta soddisfa sempre
$$\nabla f(x^{k+1})^T d^k = 0$$
.

VERO **X** FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax \geq b \end{array}$$

con A matrice $m \times n$, $b \in R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa allora il problema è convesso.

   VERO **X** FALSO

2. La funzione
$$f(x) - \epsilon \sum_{i=1}^{m} log(a_i^x - b_i)$$
   è una funzione di penalità interna per il problema.

   VERO **X** FALSO

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile e $f(x)$ convessa. Se $\bar{x}$ soddisfa le condizioni di KKT, allora $\bar{x}$ è un minimo globale.

   VERO **X** FALSO

4. Se $m > n$, allora l'insieme ammissibile non è regolare.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax \leq b \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. Le variabili duali sono m tutte vincolate ad essere non negative.

   VERO **X** FALSO

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora allora risulta $c^T x \leq c^T x^* \leq b^T u^*$ per ogni x tale che $Ax \leq b$.

   VERO **X** FALSO

3. Se $\bar{u} \in R^m$ è un punto tale che $A^T \bar{u} = c$ e $\bar{u} \geq 0$, allora $\bar{u}^T(b - Ax) = 0$ qualunque sia x.

   VERO FALSO **X**

4. Se il problema primale è illimitato, allora il problema duale anche è illimitato.

   VERO FALSO **X**

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (verde)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2^o anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4: ogni risposta CORRETTA vale **1** PUNTO e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI. Per gli esercizi 5,6,7: ogni risposta CORRETTA vale **0,25** PUNTI e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + \sqrt{2}x_2x_3 - \sqrt{2}x_2 - 4x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è coerciva.

VERO **X**	FALSO

2. Il punto $(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

VERO **X**	FALSO

3. Il punto $(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 0)^T$ è l'unico punto di minimo globale.

VERO **X**	FALSO

4. Nel punto $x^0 = (-1,\ 0,\ 1)^T$ il passo ottenuto con una ricerca di linea esatta lungo la direzione $d = (1,\ 0,\ 2)^T$ è $\alpha^* = -\frac{1}{13}$.

VERO **X**	FALSO

5. Le direzioni $d^0 = (1,\ 0,\ 2)^T$ e $d^1 = (-6,\ 0,\ 1)^T$ sono coniugate tra loro.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & -x_1^2 \le x_2 \le x_1^2 \\ & -1 \le x_1 \le 1 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ non è di regolarità per i vincoli

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non soddisfa le condizioni di KKT.

   VERO FALSO **X**

3. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni di KKT.

   VERO FALSO **X**

4. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

   VERO FALSO **X**

5. Il punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è una soluzione globale.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \qquad & -4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \; le4 \\ & x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & 6u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \ge -4 \\ & u_1 + u_2 \ge 1 \\ & u_1 + u_2 = -2 \\ & u_1 \ge 0, \; u_2 \ge 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO **X** FALSO

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \min & 6u_1 + 4u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \geq -4 \\ & u_1 + u_2 \geq 1 \\ & u_1 + u_2 \geq -2 \\ & u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO	FALSO **X**

3. I punti $\bar{x} = (2,\ 2,\ 0)^T$ e $\bar{u} = (1,\ 0)^T$ sono ammissibili rispettivamente per il problema primale e per il duale e risulta $-6 \leq c^T x^* \leq 6$.

VERO	FALSO **X**

4. Il punto $u^* = (0,\ 1)^T$ è ottimo per il duale ed esiste una soluzione ottima per il problema primale.

VERO	FALSO **X**

5. Il problema duale è vuoto.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Siano x_i con $i \in INS$ le variabili di un generico problema e supponiamo di dover dichiarare in AMPL i seguenti vincoli

$$Lower \leq x_i \leq Upper \quad , \forall i \in INS$$

dove *Lower* e *Upper* sono due parametri.

Rispondere alle seguenti affermazioni.

1. Le seguenti istruzioni, nel file `.mod`, sono corrette

```
set INS;
param Upper;
param Lower;
var x{INS}>=Lower,<=Upper;
⋮
```

VERO **X**	FALSO

2. Le seguenti istruzioni, nel file `.mod`, sono corrette

```
set INS;
param Upper;
param Lower;
var x{INS};
⋮
s.t.  vinc1{i in INS}:x[i]>=Lower;
s.t.  vinc2{i in INS}:x[i]<=Upper;
```

VERO **X**	FALSO

3. Le seguenti istruzioni, nel file `.mod`, sono corrette

```
set INS;
param Upper;
var x{INS}>=Lower;
param Lower;
⋮
s.t.  vinc1{i in INS}:x[i]<=Upper;
```

VERO	FALSO **X**

Esercizio 5. (**Punteggio massimo = 1**)

Dato un problema (P) di minimizzazione non vincolata di una funzione

$$\min_{R^n} \; f(x).$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa, allora ammette sempre minimo.

VERO	FALSO **X**

2. Se $\bar{x}$ è un minimo globale, allora $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $\nabla^2 f(\bar{x}) \succeq 0$.

VERO **X**	FALSO

3. Se in $\bar{x}$ risulta $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, si può sempre trovare una direzione d di discesa per cui risulti $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$.

VERO **X**	FALSO

4. Il metodo di Newton (puro) è globalmente convergente con rapidità di quadratica.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \max & f(x) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A matrice $m \times n$, $b \in R^m$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $f(x)$ è convessa allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. La funzione

$$-f(x) + \frac{1}{\epsilon}\Big[\sum_{j=1}^{m}(a_j x - b_j)^2 + \sum_{i=1}^{n}\min\{0, x_i\}^2\Big]$$

è una funzione di penalità esterna per il problema.

VERO **X**	FALSO

3. Sia $\bar{x}$ un punto ammissibile. Se $\bar{x}$ è un minimo locale, allora soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

VERO	FALSO **X**

4. Le condizioni di KKT sono necessarie senza ipotesi sui vincoli.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con A matrice $m \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono n di disuguaglianza.

VERO **X**	FALSO

2. Se il problema primale ammette soluzione ottima finita x^*, allora esiste una soluzione ammissibile $\bar{u}$ del problema duale (P) tale che $c^T x^* = b^T \bar{u}$.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{x} \in R^n$ è un punto tale che $A\bar{x} = b$, e $\bar{x} \geq 0$ allora $c^T \bar{x} \leq b^T u$ per ogni u ammissibile per il problema duale.

VERO **X**	FALSO

4. Se il problema duale è vuoto, allora il problema primale ha insieme ammissibile vuoto oppure è illimitato.

VERO **X**	FALSO