ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ (x_1-1)(x_2-2)x_3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_3^2(x_1+x_2) - 6x_1x_3 - 9x_2 - 6x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è convessa.

   VERO ☐ FALSO **X**

2. Il punto $(1,\ 2,\ 2)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine

   VERO **X** FALSO ☐

3. È possibile affermare che il punto $(1,\ 2,\ 2)^T$ è un minimo locale stretto.

   VERO ☐ FALSO **X**

4. Nel punto $(1,\ 2,\ 1)^T$, la direzione $d = (0,\ 1,\ 0)^T$ risulta essere di discesa e una ricerca di linea esatta produce un valore del passo α non negativo

   VERO **X** FALSO ☐

5. Nel punto $(1,\ 2,\ 1)^T$ è possibile definire la direzione del metodo di Newton puro.

   VERO **X** FALSO ☐

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \\ & e^{\frac{1}{2}x_1 + x_2} \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema NON è convesso.

   VERO ☐ FALSO **X**

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NON soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO ☐ FALSO **X**

3. L'insieme ammissibile è regolare.

   VERO **X** FALSO ☐

4. Detti λ_1 e λ_2 i moltiplicatori associati rispettivamente al primo e secondo vincolo, esiste un punto di KKT con $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$

   VERO ☐ FALSO **X**

5. La funzione

$$P(x_1, x_2; \varepsilon) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\max\{0, e^{\frac{1}{2}x_1 + x_2} - 1\}\Big)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\min\{0, x_1\}\Big)^2$$

   è un funzione di penalità quadratica per il problema dato

   VERO **X** FALSO ☐

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & -2u_1 + 2u_2 \\ & -u_1 - 4u_2 \geq -8 \\ & 4u_1 - 3u_2 \geq -12 \\ & u_1 + u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & -8x_1 - 12x_2 \\ & -x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \\ & -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO **X** FALSO ☐

2. Il problema

$$\begin{aligned} \max \quad & -8x_1 - 12x_2 \\ & -x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \\ & -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. Il problema primale è illimitato.

VERO **X** | FALSO

4. Esistono infinite coppie di soluzioni ottime primali duali.

VERO | FALSO **X**

5. Il problema duale è vuoto.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{aligned} & \min \ \sum_{i=1}^{5} c_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{3} d_j y_j \\ & \sum_{i=1}^{5} t_{ij} x_{ij}^2 - y_j \leq d_j \quad j = 1, \ldots, 3 \\ & 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \ldots, 5, \quad j = 1, \ldots, 3 \\ & y_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 3 \end{aligned}$$

Dove x_{ij} e y_j sono le variabili del problema mentre c_i, d_j t_{ij} con $i = 1, \ldots, 5$ $j = 1, \ldots, 3$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param n;
param m;
param c{1..n};
param d{1..m};
param t{1..n,1..m};
var x{1..n,1..m};
var y{1..m};
```

VERO **X** | FALSO

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è errata:

```
minimize obiettivo:  sum{i in 1..n}(c[i]*sum{j in 1..m}(x[i,j]**2))
+sum{j in 1..m}d[j]*y[j];
```

VERO | FALSO **X**

3. Supponiamo che il parametro t assuma i seguenti valori:

	1	2	3
1	0.2	0.4	0.5
2	0.1	0.4	0.2
3	0.1	0.4	0.5
4	0.2	0.3	0.4
5	0.2	0.6	0.5

La seguente assegnazione nel file. dat è corretta.

```
param t :  1 2 3:=
1 0.2 0.4 0.5
2 0.1 0.4 0.2
3 0.1 0.4 0.5
4 0.2 0.3 0.4
5 0.2 0.6 0.5;
```

VERO **X**	FALSO

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Sia dato il problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} \; f(x) = \frac{1}{2}\Big(x^T Q x + \|x\|^2\Big) + c^T x.$$

dove Q è una matrice $n \times n$ simmetrica. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $Q \succeq 0$ (semidefinita positiva) la funzione è strettamente convessa.

VERO **X**	FALSO

2. Se $Q + I \succeq 0$ (è semidefinita positiva), esiste una soluzione al problema $\min_{R^n} \; f(x)$ se e solo se esiste una soluzione al sistema lineare $(Q + I)x = -c$.

VERO **X**	FALSO

3. Se $Q \succeq 0$ (semidefinita positiva) il metodo delle direzioni coniugate genera direzioni linearmente indipendenti.

VERO **X**	FALSO

4. Se $\lambda_{\min}(Q) > -1$, il metodo del gradiente converge alla soluzione ottima.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con $f : R^n \to \; R$, $h : \; R^n \to \; R^m$, $g : \; R^n \to \; R^p$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se le funzioni f, g, h sono strettamente convesse allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. Se si modifica il secondo membro del vincolo di disuguaglianza, ponendo $g(x) \leq \varepsilon$, ($\varepsilon > 0$) la soluzione può peggiorare.

VERO	FALSO **X**

3. Un punto $\bar{x}$ che soddisfa le condizioni di KKT è sempre una soluzione del problema.

VERO	FALSO **X**

4. Un punto $\bar{x}$ che è una soluzione del problema, soddisfa sempre le condizioni sufficienti del secondo ordine.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & A_1 x \geq b_1 \\ & A_2 x \leq b_2 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono n tutti di disuguaglianza.

VERO	FALSO **X**

2. Se il problema duale ammette soluzione ottima finita u^*, allora esiste una soluzione ammissibile $\bar{x}$ del problema primale (P) tale che $c^T\bar{x} = b^T u^*$ con $b = (b_1 \ \ -b_2)^T$.

VERO **X**	FALSO

3. Se $\bar{u} = (\bar{u}_1, \ \bar{u}_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ è un punto tale che $A_1^T\bar{u}_1 - A_2^T\bar{u}_2 = c$, allora $b^T\bar{u} \leq c^T x^*$ con $b = (b_1 \ \ -b_2)^T$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema primale è vuoto, allora il problema duale deve avere insieme ammissibile vuoto.

VERO	FALSO **X**

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (bianco)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4: ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI. Per gli esercizi 5,6,7: ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ (x_1-1)(x_2-2)x_3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_3^2(x_1+x_2) - 6x_1x_3 - 9x_2 - 6x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione è strettamente convessa.

   VERO | FALSO **X**

2. Il punto $(1,\ 2,\ 2)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del secondo ordine.

   VERO | FALSO **X**

3. Nel punto $(1,\ 2,\ 1)^T$, esiste sempre una direzione di discesa.

   VERO **X** | FALSO

4. Nel punto $(1,\ 2,\ 1)^T$, l'approssimazione quadratica della funzione risulta convessa.

   VERO | FALSO **X**

5. Nel punto $(1,\ 2,\ 1)^T$ la direzione del metodo di Newton puro è sicuramente di discesa.

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min \ & (x_1+1)^2 + x_2^2 \\ & e^{x_1+\frac{1}{2}x_2} \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

3. L'insieme ammissibile NON è regolare.

VERO	FALSO **X**

4. Detti λ_1 e λ_2 i moltiplicatori associati rispettivamente al primo e secondo vincolo, esiste un punto di KKT con $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$

VERO **X**	FALSO

5. La funzione

   $$P(x_1, x_2; \varepsilon) = x_1^2 + (x_2-1)^2 - \varepsilon \ln\left(e^{x_1+\frac{1}{2}x_2} - 1\right) - \varepsilon \ln(x_1)$$

   è un funzione di barriera logaritmica per il problema dato.

VERO	FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \max \quad & -8x_1 - 12x_2 \\ & -x_1 + 4x_2 + x_3 = -2 \\ & -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \min \ & -2u_1 + 2u_2 \\ & -u_1 - 4u_2 \geq -8 \\ & 4u_1 - 3u_2 \geq -12 \\ & u_1 + u_2 \geq 0 \\ & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO	FALSO **X**

2. Il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & -2u_1 + u_2 \\ & -u_1 - 4u_2 \geq -8 \\ & 4u_1 - 3u_2 \geq -12 \\ & u_1 + u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. Il punto $(2, 2)$ è ammissibile per il problema duale.

VERO | FALSO **X**

4. Esistono infinite coppie di soluzioni ottime primali duali.

VERO | FALSO **X**

5. Il problema duale è illimitato.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{aligned} & \min \ \sum_{i=1}^{5} c_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{3} d_j y_j \\ & \sum_{i=1}^{5} t_{ij} x_{ij}^2 - y_j \leq d_j \quad j = 1, \dots, 3 \\ & 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, 5, \quad j = 1, \dots, 3 \\ & y_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

Dove x_{ij} e y_j sono le variabili del problema mentre c_i, d_j t_{ij} con $i = 1, \dots, 5$ $j = 1, \dots, 3$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param c{1..n};
param d{1..m};
param t{1..n,1..m};
param n;
param m;
var x{1..n,1..m};
var y{1..m};
```

VERO | FALSO **X**

2. La seguente dichiarazione della funzione obiettivo è errata:

```
minimize obiettivo{i in 1..n}:  (c[i]*sum{j in 1..m}(x[i,j]**2))
+sum{j in 1..m}d[j]*y[j];
```

VERO **X** | FALSO

3. Supponiamo che il parametro t assuma i seguenti valori:

	1	2	3
1	0.2	0.4	0.5
2	0.1	0.4	0.2
3	0.1	0.4	0.5
4	0.2	0.3	0.4
5	0.2	0.6	0.5

La seguente assegnazione nel file. dat è corretta.

```
param t := 1 2 3
1 0.2 0.4 0.5
2 0.1 0.4 0.2
3 0.1 0.4 0.5
4 0.2 0.3 0.4
5 0.2 0.6 0.5;
```

VERO | FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Sia dato il problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} \; f(x) = \frac{1}{2}\Big(x^T Q x + \|x\|^2\Big) + c^T x.$$

dove Q è una matrice $n \times n$ simmetrica. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se $\lambda_{\min}(Q) > -1$ la funzione è coerciva (dove $\lambda_{\min}(Q)$ indica l'autovalore minimo di Q).

   VERO **X** | FALSO

2. Se $Q \succeq 0$ (semidefinita positiva) il passo di una ricerca di linea esatta ha la forma

$$\alpha^* = -\frac{(\nabla f(x^k)^T d^k}{{d^k}^T Q d^k + \|d^k\|^2}.$$

   VERO **X** | FALSO

3. Se $Q + I \succeq 0$ (è semidefinita positiva), esiste una soluzione al problema $\min_{R^n} \; f(x)$ se e solo se esiste una soluzione al sistema lineare $(Q + I)x = -c$.

   VERO **X** | FALSO

4. Se $Q \succeq 0$ (semidefinita positiva) il metodo delle direzioni coniugate genera direzioni linearmente indipendenti.

   VERO **X** | FALSO

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, $h : R^n \to R^m$, $g : R^n \to R^p$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se le funzioni le funzioni f, g, h sono convesse allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. Se si modifica il secondo membro del vincolo di disuguaglianza, ponendo $g(x) \leq \varepsilon$, la soluzione ottima NON può peggiorare.

VERO **X**	FALSO

3. Un punto $\bar{x}$ che soddisfa le condizioni di KKT potrebbe non essere una soluzione del problema.

VERO **X**	FALSO

4. Un punto $\bar{x}$ che è una soluzione del problema, NON sempre soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \leq b_2 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono $m_1 + m_2$ tutti di uguaglianza.

VERO	FALSO **X**

2. L'insieme ammissibile del problema duale è dato da $u = (u_1,\ u_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ tali che $A_1^T u_1 + A_2^T u_2 \geq c$, $u_1 \geq 0$.

VERO	FALSO **X**

3. Se $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ è ammissibile per il duale, allora si ha $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema duale è vuoto, allora il problema primale può ammettere soluzione ottima finita.

VERO	FALSO **X**

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito A (giallo)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4: ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI. Per gli esercizi 5,6,7: ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO), nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ (x_1 - 1)(x_2 - 2)x_3 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_3^2(x_1 + x_2) - 6x_1x_3 - 9x_2 - 6x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione NON è convessa.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(1,\ 2,\ 2)^T$ soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

   VERO FALSO **X**

3. Nel punto $(1,\ 2,\ 1)^T$, la direzione $d = (-3,\ 3,\ 6)^T$ corrisponde alla direzione utilizzata dal metodo del gradiente ed è di discesa.

   VERO **X** FALSO

4. Il passo $\alpha = 1$ soddisfa una ricerca di linea di Armijo lungo la direzione del metodo del gradiente nel punto $x^0 = (1,\ 2,\ 1)^T$ con valore di $\gamma = \frac{1}{10}$.

   VERO FALSO **X**

5. Nel punto $(1,\ 2,\ 1)^T$ la direzione del metodo di Newton puro NON è definita.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \\
& e^{\frac{1}{2}x_1 + x_2} \leq 1 \\
& x_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema è convesso.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO **X** FALSO

3. L'insieme ammissibile NON è regolare.

   VERO FALSO **X**

4. Detti λ_1 e λ_2 i moltiplicatori associati rispettivamente al primo e secondo vincolo, NON esiste un punto di KKT con $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = 0$

   VERO **X** FALSO

5. La funzione

$$
P(x_1, x_2; \varepsilon) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\max\{0, e^{\frac{1}{2}x_1 + x_2} - 1\}\Big)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\Big(\min\{0, x_1\}\Big)^2
$$

   NON è un funzione di penalità quadratica per il problema dato.

   VERO FALSO **X**

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -8u_1 + 6u_2 \\
& u_1 + 4u_2 \leq 8 \\
& -4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\
& -u_1 - u_2 \leq 0
\end{aligned}
$$

Si indichi con u^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 8x_1 + 12x_2 \\
& x_1 - 4x_2 - x_3 = -8 \\
& 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO **X** FALSO

2. Il problema

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 8x_1 + 12x_2 \\
& x_1 - 4x_2 - x_3 = -8 \\
& 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6
\end{aligned}
$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO ☐ FALSO ☒

3. Il problema primale è illimitato.

VERO ☐ FALSO ☒

4. Esistono infinite coppie di soluzioni ottime primali duali.

VERO ☒ FALSO ☐

5. Il punto $(-12/7, 12/7)$ è ottimo per il primale.

VERO ☒ FALSO ☐

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$
\begin{aligned}
& \min \ \sum_{i=1}^{5} c_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{3} d_j y_j \\
& \sum_{i=1}^{5} t_{ij} x_{ij}^2 - y_j \le d_j \quad j = 1, \dots, 3 \\
& 0 \le x_{ij} \le 1 \quad i = 1, \dots, 5, \quad j = 1, \dots, 3 \\
& y_j \ge 0 \quad j = 1, \dots, 3
\end{aligned}
$$

Dove x_{ij} e y_j sono le variabili del problema mentre c_i, d_j t_{ij} con $i = 1, \dots, 5$ $j = 1, \dots, 3$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param c{5};
param d{3};
param t{5,3};
var x{5,3};
var y{3};
```

VERO ☐ FALSO ☒

2. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1{j in 1..3}:  sum{i in 1..5}(t[i,j]*x[i,j]**2)-y[j]< = d[j];
s.t.  v2{i in 1..5, j in 1..3}:0<=x[i,j]<=1;
s.t.  v3{ j in 1..3}:y[j]>=0;
```

VERO ☒ FALSO ☐

3. Supponiamo che il parametro t assuma i seguenti valori:

	1	2	3
1	0.2	0.4	0.5
2	0.1	0.4	0.2
3	0.1	0.4	0.5
4	0.2	0.3	0.4
5	0.2	0.6	0.5

La seguente assegnazione nel file. dat è corretta.

```
param :  t :  1 2 3:=
1 0.2 0.4 0.5
2 0.1 0.4 0.2
3 0.1 0.4 0.5
4 0.2 0.3 0.4
5 0.2 0.6 0.5;
```

VERO | FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Sia dato il problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} \ f(x) = \frac{1}{2}\Big(x^T Q x + \|x\|^2\Big) + c^T x.$$

dove Q è una matrice $n \times n$ simmetrica. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Un punto $\bar{x}$ tale che $Q\bar{x} + \bar{x} + c = 0$ è sempre un minimo globale.

   VERO | FALSO **X**

2. Se $Q + I$ è semidefinita positiva, dove I indica la matrice identità $n \times n$, allora la funzione è convessa in R^n.

   VERO **X** | FALSO

3. Se $\lambda_{\min}(Q) < -1$ la funzione non ammette minimo (dove $\lambda_{\min}(Q)$ indica l'autovalore minimo di Q).

   VERO **X** | FALSO

4. Se $Q \succ 0$ (semidefinita positiva) il metodo del gradiente termina in al più n passi.

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, $h : R^n \to R^m$, $g : R^n \to R^p$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se il problema è convesso, allora le funzioni le funzioni f, g, h sono convesse.

VERO	FALSO **X**

2. Se si modifica il secondo membro del vincolo di disuguaglianza, ponendo $g(x) \leq \varepsilon$, la soluzione ottima potrebbe migliorare.

VERO **X**	FALSO

3. Un punto $\bar{x}$ che soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine potrebbe non essere una soluzione del problema.

VERO	FALSO **X**

4. Un punto $\bar{x}$ che è una soluzione del problema, NON sempre soddisfa le condizioni di KKT.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \leq b_2 \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono n tutti di uguaglianza.

VERO	FALSO **X**

2. L'insieme ammissibile del problema duale è dato da $u = (u_1,\ u_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ tali che $A_1^T u_1 + A_2^T u_2 \leq c$, $u_2 \geq 0$.

VERO	FALSO **X**

3. Se $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ è ammissibile per il duale, allora si ha $b^T \bar{u} \leq c^T x^*$.

VERO	FALSO **X**

4. Se il problema primale è vuoto, allora il problema duale può ammettere soluzione ottima finita.

VERO	FALSO **X**

ESAME di OTTIMIZZAZIONE - Compito B (bianco)

Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale – **2º anno**

Cognome : **Nome** :

VALUTAZIONE
Per gli esercizi 1,2,3,4:
ogni risposta GIUSTA vale **+1** PUNTO e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.5** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.
Per gli esercizi 5,6,7:
ogni risposta GIUSTA vale **0,25** PUNTI e
ogni risposta SBAGLIATA vale **-0.25** PUNTI (VALORE NEGATIVO),
nessuna risposta vale **0** PUNTI.

Esercizio 1. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min\ (x_1-1)(x_2-2)x_3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_3^2(x_1+x_2) - 6x_1x_3 - 9x_2 - 6x_3$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La funzione NON è strettamente convessa.

   VERO **X** FALSO

2. Il punto $(1,\ 2,\ 2)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine.

   VERO **X** FALSO

3. Si può escludere che il punto $(1,\ 2,\ 2)^T$ sia un minimo.

   VERO **X** FALSO

4. Nel punto $(-2,\ 2,\ 0)^T$, l'approssimazione quadratica della funzione risulta convessa.

   VERO FALSO **X**

5. La direzione $d = (4,\ 13,\ -6)^T$ corrispondente al metodo del gradiente nel punto $x^0 = (-2,\ 2,\ 0)^T$ è di discesa in tal punto.

   VERO **X** FALSO

Esercizio 2 (*Punteggio massimo = 5*) Dato il problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1+1)^2 + x_2^2 \\ & e^{x_1+\frac{1}{2}x_2} \geq 1 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Il problema NON è convesso.

   VERO ☐ FALSO **X**

2. Il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NON soddisfa con opportuni moltiplicatori le condizioni di KKT.

   VERO ☐ FALSO **X**

3. L'insieme ammissibile è regolare.

   VERO **X** FALSO ☐

4. Detti λ_1 e λ_2 i moltiplicatori associati rispettivamente al primo e secondo vincolo, NON esiste un punto di KKT con $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$

   VERO ☐ FALSO **X**

5. La funzione

   $$P(x_1, x_2; \varepsilon) = x_1^2 + (x_2-1)^2 - \varepsilon \ln\left(e^{x_1+\frac{1}{2}x_2} - 1\right) - \varepsilon \ln(x_1)$$

   NON è un funzione di barriera logaritmica per il problema dato.

   VERO **X** FALSO ☐

Esercizio 3. (*Punteggio massimo = 5*) Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 12x_2 \\ & x_1 - 4x_2 - x_3 = -8 \\ & 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Si indichi con x^* la soluzione ottima di tale problema (se esiste).

1. Il problema

   $$\begin{aligned} \max \quad & -8u_1 + 6u_2 \\ & u_1 + 4u_2 \leq 8 \\ & -4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 - u_2 \leq 0 \end{aligned}$$

   corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

   VERO **X** FALSO ☐

2. Il problema

$$\begin{array}{ll} \max & -8u_1 + 6u_2 \\ & u_1 + 4u_2 \leq 8 \\ & -4u_1 + 3u_2 \leq 12 \\ & -u_1 - u_2 \leq 0 \\ & u_1, u_2 \geq 0 \end{array}$$

corrisponde ad un possibile problema duale per (P).

VERO | FALSO **X**

3. Il problema duale è illimitato.

VERO | FALSO **X**

4. Esistono infinite coppie di soluzioni ottime primali duali.

VERO **X** | FALSO

5. Il punto $(0, 2, 0)$ è ottimo per il primale.

VERO **X** | FALSO

Esercizio 4. (**Punteggio massimo = 3**) Sia dato il seguente problema di Ottimizzazione non lineare:

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{5} c_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{3} d_j y_j \\ \sum_{i=1}^{5} t_{ij} x_{ij}^2 - y_j \leq d_j \quad j = 1, \ldots, 3 \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \ldots, 5, \quad j = 1, \ldots, 3 \\ y_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 3 \end{array}$$

Dove x_{ij} e y_j sono le variabili del problema mentre c_i, d_j t_{ij} con $i = 1, \ldots, 5$ $j = 1, \ldots, 3$ sono parametri del problema. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. La seguente dichiarazione di parametri e variabili è corretta:

```
param c{1..5};
param d{1..3};
param t{1..5, 1..3};
var x{1..5, 1..3};
var y{1..3};
```

VERO **X** | FALSO

2. La seguente dichiarazione dei vincoli è corretta:

```
s.t.  v1{j in 1..3}:  sum{i in 1..5}(t[i,j]*x[i,j]**2)-y[j]< = d[j];
s.t.  v2:0<=sum{i in 1..5, j in 1..3}x[i,j]<=1;
s.t.  v3{ j in 1..3}:y[j]>=0;
```

VERO | FALSO **X**

3. Supponiamo che il parametro t assuma i seguenti valori:

	1	2	3
1	0.2	0.4	0.5
2	0.1	0.4	0.2
3	0.1	0.4	0.5
4	0.2	0.3	0.4
5	0.2	0.6	0.5

La seguente assegnazione nel file. dat è corretta.

```
param :  t := 1 2 3:=
1 0.2 0.4 0.5
2 0.1 0.4 0.2
3 0.1 0.4 0.5
4 0.2 0.3 0.4
5 0.2 0.6 0.5;
```

VERO | FALSO **X**

Esercizio 5.(**Punteggio massimo = 1**)

Sia dato il problema di minimizzazione non vincolata

$$\min_{R^n} \; f(x) = \frac{1}{2}\Big(x^T Q x + \|x\|^2\Big) + c^T x.$$

dove Q è una matrice $n \times n$ simmetrica. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Si tratta di una funzione quadratica con hessiano $Q + I$ dove I indica la matrice identità $n \times n$, che risulta coerciva qualunque sia la matrice Q.

   VERO | FALSO **X**

2. Se $Q \succeq 0$ (semidefinita positiva) un punto $\bar{x}$ tale che $Q\bar{x} + \bar{x} + c = 0$ è sempre un minimo globale.

   VERO **X** | FALSO

3. Se $\lambda_{\min}(Q) < -1$ la funzione non ammette minimo (dove $\lambda_{\min}(Q)$ indica l'autovalore minimo di Q).

   VERO **X** | FALSO

4. Se $Q \succeq 0$ (semidefinita positiva) il metodo del gradiente termina in al più n passi.

   VERO | FALSO **X**

Esercizio 6. (*Punteggio massimo = 1*)

Dato un problema di programmazione non lineare vincolato

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array}$$

con $f : R^n \to R$, $h : R^n \to R^m$, $g : R^n \to R^p$. Rispondere alle seguenti affermazioni:

1. Se le funzioni le funzioni f, g, h sono convesse allora il problema è convesso.

VERO	FALSO **X**

2. Se si modifica il secondo membro del vincolo di disuguaglianza, ponendo $g(x) \leq \varepsilon$, la soluzione ottima NON può peggiorare.

VERO **X**	FALSO

3. Un punto $\bar{x}$ che soddisfa le condizioni di KKT potrebbe non essere una soluzione del problema.

VERO **X**	FALSO

4. Un punto $\bar{x}$ che è una soluzione del problema, NON sempre soddisfa le condizioni sufficienti del secondo ordine.

VERO **X**	FALSO

Esercizio 7. (*Punteggio massimo = 1*) Sia dato un problema di Programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \leq b_2 \\ & x \geq 0 \end{aligned} \qquad (P)$$

con A_1 matrice $m_1 \times n$, A_2 matrice $m_2 \times n$ e $x \in R^n$ e si indichi con x^* la soluzione ottima, se esiste.

1. I vincoli del problema duale sono $m_1 + m_2$ tutti di disuguaglianza.

   VERO   FALSO **X**

2. L'insieme ammissibile del problema duale è dato da $u = (u_1,\ u_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ tali che $A_1^T u_1 + A_2^T u_2 \geq c$, $u_2 \geq 0$.

   VERO   FALSO **X**

3. Se $\bar{u} = (\bar{u}_1,\ \bar{u}_2) \in R^{m_1} \times R^{m_2}$ è ammissibile per il duale, allora si ha $-c^T x^* \leq (b_1^T \bar{u}_1 + b_2^T u_2)$.

   VERO **X**   FALSO

4. Se il problema duale è vuoto, allora il problema primale può ammettere soluzione ottima finita.

   VERO   FALSO **X**