

## Esercitazione n° 4 per il corso di Ricerca Operativa

### Modello di Miscelazione e trasporto

Una compagnia petrolifera possiede tre depositi. Ciascun deposito è riempito con un tipo di greggio che può essere venduto rispettivamente a \$15, \$17, \$20 al barile. I depositi hanno la capacità di 4000, 3000 e 5000 barili rispettivamente. La qualità dei tre tipi di greggio è misurata dai numeri 6.8, 7.4 e 8.1. La compagnia deve soddisfare i seguenti quattro ordini utilizzando il greggio nei depositi:

Ordine	Barili	Qualità della miscela
1	2000	almeno 7
2	1500	al più 7.8
3	2500	tra 7.0 e 8.0
4	3000	7.4

Formulare il problema di PL che permette di massimizzare la seguente funzione obiettivo

$$z = R - P|Q_3 - 7.5|,$$

dove  $R$  è il ricavo totale,  $P$  una costante positiva assegnata e  $Q_3$  è la qualità della miscela destinata all'ordine 3. Si supponga che la qualità di una miscela sia funzione lineare delle percentuali dei componenti.

#### Analisi del problema

Si tratta di un modello misto trasporto-miscelazione. La funzione obiettivo è non lineare a causa della presenza del modulo e quindi è necessario usare una variabile aggiuntiva per scrivere il modello come PL.

#### Formulazione.

– *Variabili.* Le variabili di decisione sono le quantità di greggio  $i$ -esimo usato nella miscela relativa all'ordine  $j$ -esimo, indicate con  $x_{ij}$ , con  $i = 1, \dots, 3$  e  $j = 1, \dots, 4$ .

– *Vincoli.* Per quanto riguarda i vincoli si hanno:

- *Vincoli di capacità.* I serbatoi possono contenere una prefissata quantità di greggio:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 x_{1j} &\leq 4000 \\ \sum_{j=1}^4 x_{2j} &\leq 3000 \\ \sum_{j=1}^4 x_{3j} &\leq 5000 \end{aligned}$$

- *Vincoli di qualità.* Ciascuna miscela deve soddisfare certi requisiti qualitativi espressi da:

$$\begin{aligned}
 6.8x_{11} + 7.4x_{21} + 8.1x_{31} &\geq 7\left(\sum_{i=1}^3 x_{i1}\right) \\
 6.8x_{12} + 7.4x_{22} + 8.1x_{32} &\geq 7.8\left(\sum_{i=1}^3 x_{i2}\right) \\
 7\left(\sum_{i=1}^3 x_{i3}\right) &\leq 6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} \leq 8\left(\sum_{i=1}^3 x_{i3}\right) \\
 6.8x_{14} + 7.4x_{24} + 8.1x_{34} &= 7.4\left(\sum_{i=1}^3 x_{i4}\right)
 \end{aligned}$$

- *Vincoli di domanda.* Si deve soddisfare l'ordine:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^3 x_{i1} &= 2000 \\
 \sum_{i=1}^3 x_{i2} &= 1500 \\
 \sum_{i=1}^3 x_{i3} &= 2500 \\
 \sum_{i=1}^3 x_{i4} &= 3000
 \end{aligned}$$

- *Vincoli di non negatività.* Si tratta di quantità di greggio utilizzate in ogni miscela:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j.$$

–*Funzione obiettivo.* Per quanto riguarda la funzione obiettivo osserviamo che non è lineare a causa della presenza della funzione modulo. Il ricavo  $R$  è dato da

$$R = 15 \sum_{j=1}^4 x_{1j} + 17 \sum_{j=1}^4 x_{2j} + 20 \sum_{j=1}^4 x_{3j}.$$

La qualità  $Q_3$  della miscela 3 è data da:

$$Q_3 = \frac{6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33}}{\sum_{i=1}^3 x_{i3}} = \frac{6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33}}{2500},$$

quindi la funzione obiettivo si può scrivere con l'aggiunta di una variabile  $v$  come:

$$R - Pv$$

Abbiamo poi i *vincoli aggiuntivi*:

$$-v \leq \frac{6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33}}{2500} - 7.5 \leq v.$$

Complessivamente il problema di PL si scrive:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max 15 \sum_{j=1}^4 x_{1j} + 17 \sum_{j=1}^4 x_{2j} + 20 \sum_{j=1}^4 x_{3j} - Pv \\ \sum_{j=1}^4 x_{1j} \leq 4000 \\ \sum_{j=1}^4 x_{2j} \leq 3000 \\ \sum_{j=1}^4 x_{3j} \leq 5000 \\ 6.8x_{11} + 7.4x_{21} + 8.1x_{31} \geq 7 \cdot 2000 \\ 6.8x_{12} + 7.4x_{22} + 8.1x_{32} \geq 7.8 \cdot 1500 \\ 6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} \geq 7 \cdot 2500 \\ 6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} \leq 8 \cdot 2500 \\ 6.8x_{14} + 7.4x_{24} + 8.1x_{34} = 7.4 \cdot 3000 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i1} = 2000 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i2} = 1500 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i3} = 2500 \\ \sum_{i=1}^3 x_{i4} = 3000 \\ 6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} - 2500(7.5 + v) \leq 0 \\ 6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} - 2500(7.5 - v) \geq 0 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, 4. \end{array} \right.$$

**Osservazione 1** Non è necessario, seppur non produce errore, imporre il vincolo di non negatività della variabile  $v$ .

**Osservazione 2** Notiamo che è stato possibile trasformare la minimizzazione della funzione modulo in un problema equivalente lineare perché la quantità totale di miscela  $\sum_i x_{i3}$  è costante. Altrimenti si avrebbe avuto il modulo di un rapporto di funzioni lineari.

I fogli Microsoft Excel corrispondenti ai dati con valore della costante  $P = 1$  è in figura 1. Il foglio con il modello è in figura 2<sup>1</sup>. Il file Excel corrispondente al modello è disponibile in rete.

<sup>1</sup>Ringrazio lo studente Andrea Alfonso Tedeschi per aver reso disponibile il file realizzato durante l'esercitazione del 10-11-2009 a partir dal quale è stato realizzato il file in rete

MODELLO MISTO TRASPORTO - MISCELAZIONE										
Offerta					Richiesta					
Tipo	Greggio	Qualità	Costo	Capacità	depositi	Miscela	Barili	Qualità		
1		6,80	15,00	1	4000,00	1	2000,00	almeno	7,00	
2		7,40	17,00	2	3000,00	2	1500,00	al più	7,80	
3		8,10	20,00	3	5000,00	3	2500,00	tra	7,00	8,00
4						4	3000,00	uguale a	7,40	7,50
Costante positiva										
P =		1,00								

Figure 1: Foglio Excel relativo ai dati del problema

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	<b>MODELLO (con funzione modulo) MISTO TRASPORTO - MISCELAZIONE</b>									
2	<b>Variabili</b>		usato nella miscela j				Variabile aggiuntiva			
3			1	2	3	4	v =	7,76		
4	qtà greggio i	1	0,00	0,00	0,00	1000,00				
5		2	0,00	642,86	1214,29	1142,86				
6		3	2000,00	857,14	1285,71	857,14				
7				di capacità:						
8	<b>Vincoli</b>	<b>di capacità:</b>	Deposito 1	1000,00	< =	4000,00			SI	I vincoli sono soddisfatti?
9			Deposito 2	3000,00	< =	3000,00			SI	
10			Deposito 2	5000,00	< =	5000,00			SI	
11			di qualità:							
12		<b>di qualità:</b>	Miscela 1	2200,00	> =	0,00			SI	
13			Miscela 2	0,00	< =	0,00			SI	
14			Miscela 3	1900,00	> =	0,00			SI	
15				-600,00	< =	0,00			SI	
16			Miscela 4	0,00	=	0,00			SI	
17										
18		<b>di ordine:</b>		2000,00	=	2000,00			SI	
19				1500,00	=	1500,00			SI	
20				2500,00	=	2500,00			SI	
21				3000,00	=	3000,00			SI	
22										
23		<b>vincoli aggiuntivi:</b>		38785,00	> =	0,00			SI	
24				0,00	< =	0,00			NO	
25		<b>Funzione obiettivo</b>								
26	massimizzare	165992,24	Euro							
27										
28										

Figure 2: Foglio Excel relativo al modello