Capitolo 3

Modelli di Programmazione Lineare

In questo capitolo esaminiamo in modo più dettagliato la Programmazione Lineare. In particolare saranno presentati alcuni modelli di PL più o meno classici.

3.1 Struttura di un problema di Programmazione Lineare

Come abbiamo già visto nel Capitolo 2 un problema di Programmazione Lineare è caratterizzato da una funzione obiettivo lineare (da minimizzare o massimizzare) della forma

$$f(x) = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

e da un numero finito m di vincoli lineari della forma

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \ldots & +a_{1n}x_n & \simeq b_1 \\ a_{21}x_1 + & \ldots & +a_{2n}x_n & \simeq b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \ldots & +a_{mn}x_n & \simeq b_m. \end{array} \tag{3.1}$$

dove con $\simeq$ intendiamo $\leq, \geq$ oppure $=$.
Introducendo il vettore $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, $x \in \mathbb{R}^n$ definito $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, il vettore $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ e la matrice $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

un generico problema di Programmazione Lineare può essere scritto nella forma

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \simeq b. \end{array}$$

Si osservi che, indicando con a_i^T, $i = 1, \ldots, m$, le righe della matrice A, ciascun vincolo del problema, ovvero ciascuna disuguaglianza della (3.1) può essere scritto nella forma $a_i^T x \simeq b_i$, $i = 1, \ldots, m$ con $\simeq$ pari a $\leq, \geq$ oppure $=$.

Un problema di PL consiste nel minimizzare (massimizzare) una funzione obiettivo lineare su un poliedro.

Tra le forme di poliedri più usate nella definizione di problemi di PL abbiamo le seguenti:

(a) $S = \{x \in R^n : \; Ax = b\}$

(b) $S = \{x \in R^n : \; Ax \geq b\}$

(c) $S = \{x \in R^n : \; Ax = b, \; x \geq 0\}$ (forma standard)

In R^2 s

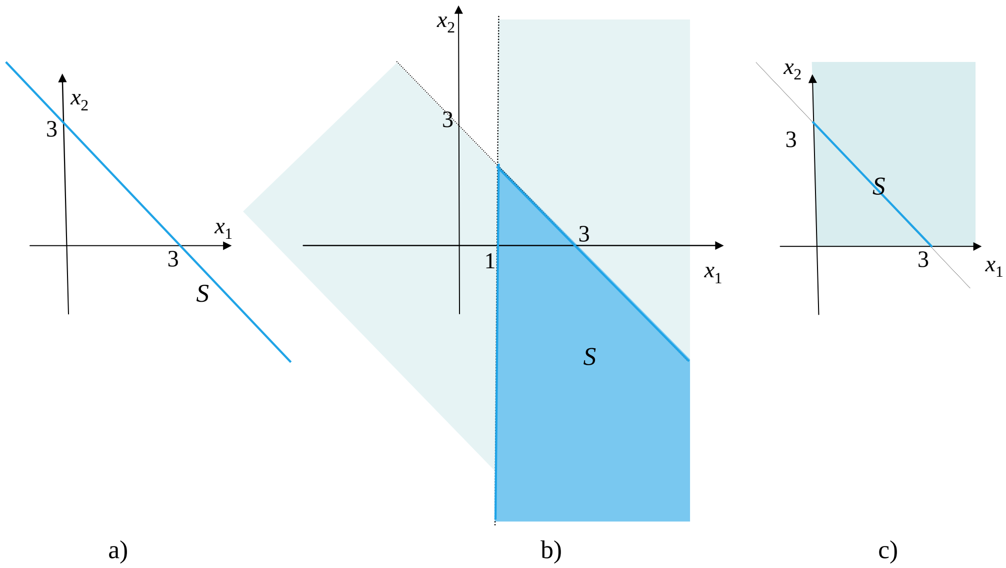

Figura 3.1: Esempi di poliedri in $I\!R^2$.

(a) $S = \{x \in R^2 : \; x_1 + x_2 = 3\}$ rappresentato in a) di Figura 3.1. La matrice $A = (1 \; 1)$ e $b = 3$.

(b) $S = \{x \in R^2 : \; x_1 + x_2 \leq 3, \; x_1 \geq 1\}$ rappresentato in b) di Figura 3.1.
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) (forma standard) $S = \{x \in R^2 : \; x_1 + x_2 = 3, \; x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0\}$ rappresentato in c) di Figura 3.1. La matrice $A = (1 \; 1)$ e $b = 3$.

In generale però è sempre possibile sempre riportarsi ad una delle forme (b) o (c) con semplici trasformazioni dei vincoli o delle variabili. È da notare che non è possibile ricondursi nel caso generale a problemi con soli vincoli di uguaglianza del tipo

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b. \end{array}$$

Tali problemi sono in effetti di scarsa rilevanza pratica in quanto è possibile dimostrare che se esiste una soluzione ammissibile e il problema non è illimitato allora *tutte* le soluzioni ammissibili sono ottime. In particolare vale il teorema 10.2.1.

Trasformazioni dei vincoli Osserviamo che si può sempre supporre che il secondo membro di un vincolo di uguaglianza o disuguaglianza sia non negativo. Infatti, se così non fosse, basta moltiplicare per (-1) (ovvero cambiare di segno) ad entrambi i membri del vincolo e, eventualmente cambiare il verso della disuguaglianza. Supponiamo quindi nel seguito, senza perdere di generalità che $b_j \geq 0$.

Da disuguaglianza a uguaglianza Con l'introduzione di opportune variabili aggiuntive non negative, ogni vincolo di disuguaglianza può sempre essere posto nella forma di vincolo di uguaglianza. Infatti un vincolo del tipo

$$a_j^T x \leq b_j, \tag{3.2}$$

può essere riscritto nella forma

$$a_j^T x + x_{n+1} = b_j, \qquad \text{con} \quad x_{n+1} \geq 0$$

ove la variabile x_{n+1} rappresenta la differenza, non negativa, tra il secondo e il primo membro della disuguaglianza (3.2), e viene detta *variabile di slack.* D'altra parte una disuguaglianza del tipo

$$a_j^T x \geq b_j, \tag{3.3}$$

può essere posta nella forma

$$a_j^T x - x_{n+1} = b_j, \qquad \text{con} \quad x_{n+1} \geq 0$$

ove la variabile x_{n+1} rappresenta la differenza, non negativa, tra il primo e il secondo membro della disuguaglianza (3.3), e viene detta *variabile di surplus.* Quando la distinzione non è necessaria, le variabili slack e di surplus vengono chiamate variabili ausiliarie.

Esempio 3.1.1 Il sistema di vincoli

$$\begin{array}{rcccccc}
3x_1 & & & + & 4x_3 & \leq & 5 \\
-5x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & -7 \\
8x_1 & & & + & 9x_3 & \geq & 2
\end{array}$$

può essere riscritto nella forma

$$\begin{array}{ccccccccc}
3x_1 & & & + & 4x_3 & + & x_4 & & = & 5 \\
5x_1 & - & x_2 & + & 6x_3 & & & & = & 7 \\
8x_1 & & & + & 9x_3 & & & - & x_5 = & 2 \\
x_4 & \geq & 0 & & & & & & & \\
x_5 & \geq & 0 & & & & & & &
\end{array}$$

avendo introdotto la variabile slack x_4 e la variabile di surplus x_5, entrambe non negative. $\square$

Da uguaglianza a disuguaglianza È anche possibile trasformare vincoli di uguaglianza in vincoli di disuguaglianza. Considerato il vincolo $a_j^T x = b_j$ si pu]'o trasformare in due vincoli di disuguaglianza

$$\begin{array}{l}
a_j^T x \leq b_j \\
-a_j^T x \leq -b_j
\end{array}$$

Trasformazioni delle variabili Nei problemi di programmazione lineare si può sempre assumere che le variabili di decisione siano non negative, e cioè che per ogni i risulti $x_i \geq 0$. Infatti se per qualche i deve risultare $x_i \leq 0$, basta effettuare la sostituzione $x_i = -x_i'$, con $x_i' \geq 0$; se per qualche i la variabile x_i non è vincolata in segno, basta sostituire ad essa la differenza tra due variabili aggiuntive entrambe vincolate in segno, cioè basta porre $x_i = x_i^+ - x_i^-$, con $x_i^+ \geq 0$, e $x_i^- \geq 0$.

Esempio 3.1.2 Sia dato il vincolo

$$x_1 + 0.5x_2 \leq 3$$

con $x_2 \leq 0$ e con x_1 non vincolata.
Ponendo $x_1 = x_1 - x_3$ e $x_2 = -x_2$, equivale al vincolo

$$x_1 - 0.5x_2 - x_3 \leq 3$$

con $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. □

3.2 Trasformazioni equivalenti

Consideriamo alcune formulazioni equivalenti di PL relative ad alcune importanti classi di problemi. In particolare, analizziamo il caso in cui la funzione obiettivo è il massimo tra funzioni lineari oppure nella funzione obiettivo sono presenti dei valori assoluti.

3.2.1 Funzione obiettivo di tipo max

Si consideri il problema

$$\min_{x \in S} \left(\max_{1 \leq i \leq m} \{c_i^T x + d_i\} \right) \tag{3.4}$$

in cui S è un poliedro e $c_i^T x + d_i$, $i = 1, \dots, m$ sono assegnate con $x \in \mathbb{R}^n, c_i \in \mathbb{R}^n$. Il problema (3.4) ha una funzione obiettivo che è della forma $\max_{1 \leq i \leq m} h_i(x)$ con $h_i : R^n \to R$ che, in generale, risulta non differenziabile e dunque *non lineare*. Un esempio di funzione di questo tipo per $n = 1$ e $m = 3$ è rappresentato in Figura 3.2. I problemi di questo tipo sono di solito chiamati problemi *minimax*.

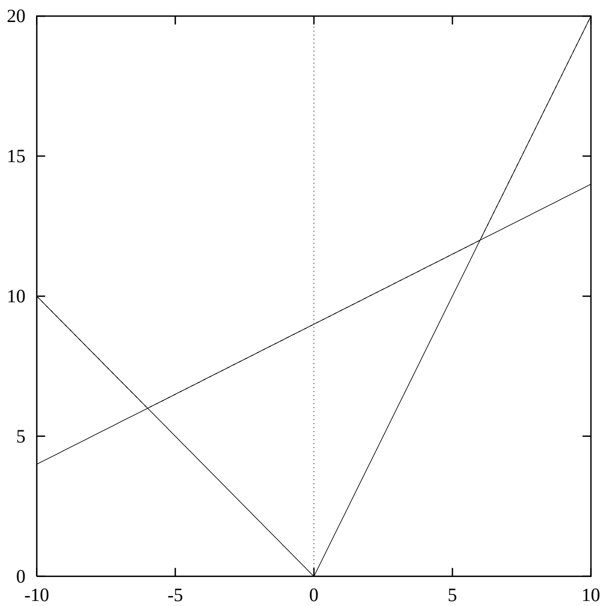

Figura 3.2: $\max\left\{2x, -x, \frac{1}{2}x + 9\right\}$

Aggiungendo una variabile $v \in R$ è possibile mostrare che tale problema è equivalente al problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{ll} \min_{x,v} & v \\ & x \in S \\ & c_i^T x + d_i \le v, \; i = 1, \dots, m. \end{array} \tag{3.5}$$

Per dimostrare l'equivalenza dei problemi (3.4) e (3.5), dobbiamo fare vedere che data una soluzione x^* del problema (3.4) possiamo determinare una soluzione $(x,\ v)^{**}$ del problema (3.5) e viceversa.

Supponiamo di avere una soluzione x^* del problema (3.4). Posto $x^{**} = x^*$ e $v^{**} = \max_{1 \le i \le m}\{c_i^T x^* + d_i\}$ abbiamo che la coppia $(x,\ v)^{**}$ è ammissibile per il problema (3.5), infatti

$$x^{**} = x^* \in S \qquad c_i^T x^{**} + d_i \le v^{**} = \max_{1 \le i \le m}\{c_i^T x^{**} + d_i\}.$$

Inoltre $v^{**} \le v$ per ogni $(x,\ v)$ ammissibile.
Viceversa, sia data una soluzione ottima $(x,\ v)^*$ del problema (3.5), una soluzione ammissibile del problema (3.4) è $x^{**} = x^* \in S$. Si tratta anche della soluzione ottima perche‘

$$v \ge v^* = \max_{1 \le i \le m}\{c_i^T x^* + d_i\}$$

3.2.2 Funzione modulo

Si consideri il problema

$$\min_{x \in S} |c^T x| \tag{3.6}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$. Il problema (3.6) può essere equivalentemente scritto nella forma

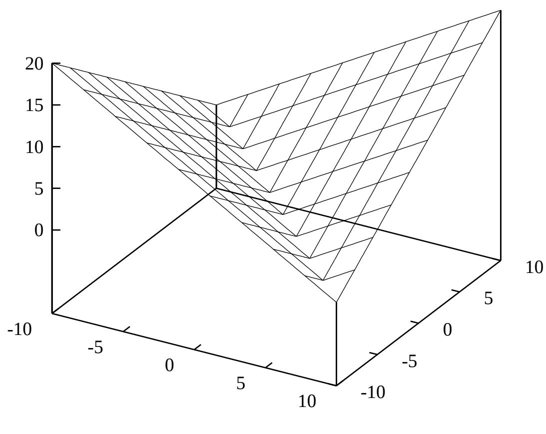

Figura 3.3: Curve di livello della funzione $f(x, y) = |x + y|$

$$\min_{x \in S} \max\{c^T x, -c^T x\} \tag{3.7}$$

e dunque applicando la trasformazione descritta per il problema (3.4), si ottiene il problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \min_{x,v} & v \\ & c^T x \leq v \\ & c^T x \geq -v \\ & x \in S. \end{array} \tag{3.8}$$

Sono inoltre equivalenti i seguenti problemi:

$$\min_{x \in S} \left(\max_{1 \leq i \leq m} |h_i(x)| \right) \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,v} & v \\ & -v \leq h_i(x) \leq v, \ i = 1, \ldots, m \\ & x \in S. \end{array}$$

3.3 Semplici esempi di problemi di programmazione lineare

Chiariremo meglio i concetti finora esposti con alcuni esempi. I problemi descritti hanno una funzione essenzialmente esemplificativa. In casi concreti, un problema di programmazione lineare può avere un numero di variabili di decisione e un numero di vincoli dell'ordine delle decine e centinaia di migliaia.

3.3.1 Problemi di miscelazione.

Si tratta di problemi in cui si hanno a disposizione un certo numero di sostanze ciascuna delle quali ha un certo costo ed un determinato contenuto di componenti utili. Si vuole ottenere la miscela più economica di queste sostanze tale che contenga una certa quantità di ciascuno dei componenti.
vediamo un semplice esempio.

Un problema di miscelazione

Un'industria conserviera deve produrre succhi di frutta mescolando polpa di frutta e dolcificante ottenendo un prodotto finale che deve soddisfare alcuni requisiti riguardanti il contenuto di vitamina C, di sali minerali e di zucchero. La polpa di frutta e il dolcificante vengono acquistati al costo rispettivamente di Lire 400 e Lire 600 ogni ettogrammo. Inoltre dalle etichette si ricava che 100 grammi di polpa di frutta contengono 140 mg di vitamina C, 20 mg di sali minerali e 25 grammi di zucchero, mentre 100 grammi di dolcificante contengono 10 mg di sali minerali, 50 grammi di zucchero e non contengono vitamina C. I requisiti che il prodotto finale (cioè il succo di frutta pronto per la vendita) deve avere sono i seguenti: il succo di frutta deve contenere almeno 70 mg di vitamina C, almeno 30 mg di sali minerali e almeno 75 grammi di zucchero. Si devono determinare le quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare nella produzione del succo di frutta in modo da minimizzare il costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base.

Formulazione.
Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi tenendo presente i requisiti di qualità richiesti. Si verifica facilmente che le ipotesi fondamentali di un modello di Programmazione Lineare sono soddisfatte.

– *Variabili.* È naturale associare la variabili di decisione alle quantità di polpa di frutta e di dolcificante da utilizzare per la produzione del succo di frutta. Quindi siano x_1 e x_2 rispettivamente le quantità espresse in ettogrammi di polpa di frutta e di dolcificante che devono essere utilizzate.

– *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal costo complessivo dell'acquisto dei due componenti base e quindi è data da $400x_1 + 600x_2$. Questa espressione naturalmente deve essere minimizzata.

– *Vincoli.* Poiché un ettogrammo di polpa contiene 140 mg di vitamina C e il dolcificante non contiene vitamina C, il primo vincolo da considerare riguardante il contenuto di vitamina C del succo di frutta si può scrivere nella forma

$$140x_1 \geq 70.$$

Analogamente per rispettare il requisito sul contenuto di sali minerali del succo di frutta si dovrà imporre il vincolo

$$20x_1 + 10x_2 \geq 30.$$

Infine il vincolo sul contenuto di zucchero del succo di frutta si può esprimere nella forma

$$25x_1 + 50x_2 \geq 75.$$

Infine si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili cioè

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{array}{ll} \min & 400x_1 + 600x_2 \\ & 140x_1 \geq 70 \\ & 20x_1 + 10x_2 \geq 30 \\ & 25x_1 + 50x_2 \geq 75 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

□

Formalmente, supponiamo di disporre di n sostanze diverse che indichiamo con $\mathbf{S_1}, \mathbf{S_2}, \ldots, \mathbf{S_n}$ ciascuna delle quali contenga una certa quantità di ciascuno degli m componenti utili che indichiamo con $\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \ldots, \mathbf{C_m}$. Supponendo che ogni sostanza $\mathbf{S_j}$ abbia costo unitario c_j, $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} & \cdots & \mathbf{S_n} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array}$$

si desidera ottenere la miscela più economica che soddisfi alcuni requisiti qualitativi, cioè contenga una quantità non inferiore a b_i di ciascun $\mathbf{C_i}$, $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{C_1} & \mathbf{C_2} & \cdots & \mathbf{C_m} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m. \end{array}$$

Si indichi con $a_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ la quantità di componente $\mathbf{C_i}$ presente nella sostanza $\mathbf{S_j}$. Si può così costruire la seguente tabella

	$\mathbf{S_1}$	$\cdots$	$\mathbf{S_j}$	$\cdots$	$\mathbf{S_n}$
$\mathbf{C_1}$	a_{11}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{C_i}$	a_{i1}	$\cdots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{C_m}$	a_{m1}	$\cdots$	a_{mj}	$\cdots$	a_{mn}

Supponendo che valgano le ipotesi di proporzionalità, additività ed inoltre assumendo che le quantità di sostanze da utilizzare siano frazionabili, si può formulare questo problema in termini di un problema di Programmazione Lineare.

Generalizzando quanto fatto nell'esempio,è naturale introdurre le variabili di decisione $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rappresentanti la quantità di ciascuna sostanza $\mathbf{S_1}, \mathbf{S_2}, \ldots, \mathbf{S_n}$ da utilizzare nella miscela. Introducendo come spazio delle variabili lo spazio delle $n-$uple reali $\mathbb{R}^n$ si può considerare un $x \in \mathbb{R}^n$ definendo $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$.

La funzione obiettivo può essere scritta

$$z = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j.$$

Introducendo $c \in \mathbb{R}^n$, definito $c = (c_1, \ldots, c_n)^T$, la funzione obiettivo può essere scritta in notazione vettoriale

$$z = c^T x.$$

Si devono introdurre i seguenti vincoli:

- Vincoli di qualità.

  Tenendo conto del fatto che la miscela deve contenere una quantità non inferiore a b_i di ciascun componente $\mathbf{C_i}$ si dovrà avere

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Si devono considerare i vincoli di non negatività sulle variabili cioè $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Introducendo la matrice $(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e il vettore $b = (b_1, \ldots, b_m)^T$ la formulazione completa del problema può essere scritta nella forma

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.9}$$

Nella pratica, potrebbe essere necessario introdurre ulteriori vincoli:

- possono essere presenti limitazioni superiori o inferiori sulle variabili cioè $x_j \geq L$, $x_j \leq M$, $j = 1, \ldots, n$;
- se è richiesto anche che la miscela contenga una quantità non superiore ad un valore d_i di ciascun componente $\mathbf{C_i}$ si dovrà aggiungere alla formulazione un altro vincolo di qualità:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i, \quad i = 1, \ldots, m;$$

- in alcuni casi si richiede che una certa sostanza appartenga alla miscela solo se un'altra sostanza vi appartiene (o non vi appartiene). Questi vincoli sono detti disgiuntivi e la loro formalizzazione matematica sarà discussa nel Capitolo 11.

$\square$

3.3.2 Modelli di trasporto.

Sono definite m località *origini* indicate con $\mathbf{O_1}, \dots, \mathbf{O_m}$, e n località *destinazioni* indicate con $\mathbf{D_1}, \dots, \mathbf{D_n}$. Ogni origine $\mathbf{O_i}$, $(i = 1, \dots, m)$ può fornire una certa disponibilità $a_i \geq 0$ di merce che deve essere trasferita dalle origini alle destinazioni

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{O_1} & \cdots & \mathbf{O_m} \\ a_1 & \cdots & a_m. \end{array}$$

Ad ogni destinazione $\mathbf{D_j}$, $(j = 1, \dots, n)$ è richiesta una quantità $b_j \geq 0$ di merce.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D_1} & \cdots & \mathbf{D_n} \\ b_1 & \cdots & b_n. \end{array}$$

Supponiamo che il costo del trasporto di una unità di merce da $\mathbf{O_i}$ a $\mathbf{D_j}$ sia pari a c_{ij}. Tali costi nella realtà sono spesso collegati alle distanze tra origini e destinazioni. Si può così costruire la seguente tabella

	$\mathbf{D_1}$	$\cdots$	$\mathbf{D_j}$	$\cdots$	$\mathbf{D_n}$
$\mathbf{O_1}$	c_{11}	$\cdots$	c_{1j}	$\cdots$	c_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{O_i}$	c_{i1}	$\cdots$	c_{ij}	$\cdots$	c_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{O_m}$	c_{m1}	$\cdots$	c_{mj}	$\cdots$	c_{mn}

Il problema consiste nel pianificare i trasporti in modo da soddisfare le richieste delle destinazioni minimizzando il costo del trasporto complessivo nella seguente ipotesi:

- la disponibilità complessiva uguaglia la richiesta complessiva, cioè

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j; \tag{3.10}$$

si escludono possibilità di giacenze nelle origini, cioè tutta la merce prodotta in una origine deve essere trasportata in una delle destinazioni; si escludono possibilità di giacenze nelle destinazioni, cioè la quantità totale che arriva in una destinazione $\mathbf{D_j}$ deve uguagliare la richiesta b_j.

Formulazione.
Si vuole dare una formulazione del problema in esame in termini di un problema di programmazione lineare supponendo quindi che siano verificate le ipotesi di linearità e continuità.

– *Variabili.* Per ogni coppia di origine e destinazione $\mathbf{O_i}$, $\mathbf{D_j}$ si introducono le variabili di decisione x_{ij} rappresentanti la quantità di merce da trasportare da $\mathbf{O_i}$, a $\mathbf{D_j}$. Si tratta di mn variabili

	$\mathbf{D_1}$	$\cdots$	$\mathbf{D_j}$	$\cdots$	$\mathbf{D_n}$
$\mathbf{O_1}$	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{O_i}$	x_{i1}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{in}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\mathbf{O_m}$	x_{m1}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mn}

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare sarà data da costo totale del trasporto e quindi da

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

– *Vincoli.* Per le ipotesi fatte, si avranno due tipi di vincoli:

- vincoli di origine

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \dots, m; \tag{3.11}$$

impongono che tutta la merce prodotta in una origine sia trasportata alle destinazioni; si tratta di m vincoli;

- vincoli di destinazione

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \dots, n; \tag{3.12}$$

impongono che la quantità totale di merce che arriva in ciascuna delle destinazioni uguaglia la richiesta; si tratta si n vincoli.

Si devono infine considerare i vincoli di non negatività delle variabili

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m.$$

Si è così ottenuta una formulazione del problema dei trasporti con mn variabili e $m+n+mn$ vincoli:

$$\begin{cases} \min \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \right) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \dots, m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m. \end{cases} \tag{3.13}$$

Osservazione 1 È chiaro che per le ipotesi fatte dovrà risultare

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Passiamo, ora, ad analizzare alcune varianti della formulazione classica del problema dei trasporti; può infatti accadere che non tutte le rotte di trasporto siano disponibili: se non è possibile il trasporto da una certa origine $\mathbf{O_i}$ ad una destinazione $\mathbf{D_j}$ si pone, per convenzione, $c_{ij} = \infty$.
Oppure possono esistere rotte di trasporto $\mathbf{O_i} - \mathbf{D_j}$ in cui vi sono limitazioni sulle quantità massima di merci trasportabili u_{ij}. Questo produce dei vincoli del tipo $x_{ij} \leq u_{ij}$.

Infine, si può supporre che la disponibilità complessiva possa essere superiore alla domanda cioè

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3.14}$$

In tal caso, possono essere ammesse giacenze nelle origini e/o nelle destinazioni; se si accetta di avere giacenze nelle origini, allora i vincoli di origine diventano

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, \dots, m;$$

se si accetta di avere giacenze nelle destinazioni, allora i vincoli di destinazione diventano

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Anche nel caso in cui valga la (3.14), il problema dei trasporti può essere posto nella sua formulazione classica, cioè con soli vincoli di uguaglianza, introducendo una destinazione fittizia che abbia una richiesta pari a

$$\sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

e ponendo uguale a zero il costo per raggiungere questa destinazione fittizia da qualsiasi origine.

Un problema di trasporto

Consideriamo un'industria che produce un bene di consumo in due stabilimenti di produzione, situati rispettivamente a Pomezia e a Caserta. La produzione viene prima immagazzinata in due depositi, situati uno a Roma e l'altro a Napoli. Quindi i prodotti vengono distribuiti alla rete di vendita al dettaglio. Per ogni unità di prodotto, il costo del trasporto dallo stabilimento al deposito è dato dalla Tabella:

	Roma	Napoli
Pomezia	1	3
Caserta	3.5	0.5

Costi di trasporto euro/unità

La capacità produttiva dei due stabilimenti è limitata, per cui ogni settimana il bene in questione non può essere prodotto in più di 10000 unità nello stabilimento di Pomezia e in più di 8000 unità nello stabilimento di Caserta. Inoltre le statistiche di vendita informano che ogni settimana vengono vendute mediamente 11000 unità tramite il deposito di Roma e 4600 unità tramite il deposito di Napoli. L'industria vuole minimizzare il costo del trasporto della merce dagli stabilimenti ai depositi, assicurando che i depositi ricevano settimanalmente le quantità medie prima indicate.

Le variabili di decisione sono le quantità del bene di consumo trasportate settimanalmente, che possiamo associare alle variabili x_1, x_2, x_3, x_4 nel seguente modo:

quantità trasportata da Pomezia a Roma	x_1
quantità trasportata da Pomezia a Napoli	x_2
quantità trasportata da Caserta a Roma	x_3
quantità trasportata da Caserta a Napoli	x_4

che corrisponde in forma di tabella a

	Roma	Napoli
Pomezia	x_1	x_2
Caserta	x_3	x_4

Variabili decisione

La funzione obiettivo è il costo sostenuto settimanalmente per il trasporto:

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + 0.5x_4.$$

Osserviamo che $\sum_i a_i = 18000$ e $\sum_j b_j = 15600$, dunque siamo nell'ipotesi (3.14) e supponiamo di accettare giacenze nelle origini.
Poichè i due stabilimenti hanno capacità produttiva limitata deve essere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 10000 \\ x_3 + x_4 &\leq 8000. \end{aligned}$$

Poichè si vuole garantire il rifornimento medio settimanale (senza giacenza), deve essere

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 11000 \\ x_2 + x_4 &= 4600. \end{aligned}$$

Infine evidentemente deve risultare $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, e quindi il problema di programmazione lineare per l'industria dell'esempio è il seguente:

$$\begin{aligned} \min z \quad = \quad & x_1 + 3x_2 + 3.5x_3 + 0.5x_4 \\ & x_1 + x_2 \leq 10000 \\ & x_3 + x_4 \leq 8000 \\ & x_1 + x_3 = 11000 \\ & x_2 + x_4 = 4600 \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

3.3.3 Un problema di Yield Management ferroviario

Una compagnia ferroviaria vende i biglietti per il treno che effettua il percorso dalla città A (Roma) alla B (Bologna) effettuando una fermata intermedia F_1 (Firenze).

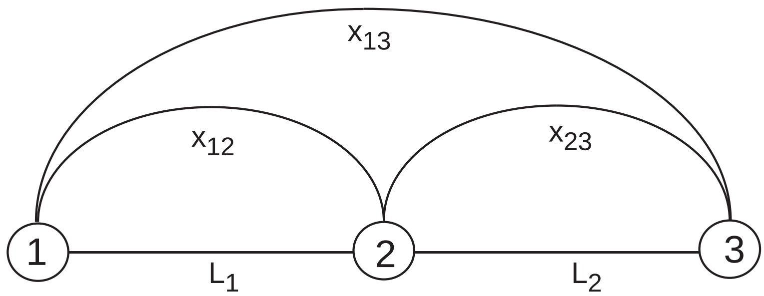

Figura 3.4: Un treno con percorso composto da due tratte L_1, L_2 e tre Origini-Destinazione (1,2), (2,3), (1,3)

Le tariffe sono fissate a priori e dipendono solo dalla distanza tra le origini-destinazioni. In particolare i prezzi in Euro (1^a classe) per per ciascuna possibile Origine-Destinazione (O-D) coperta dal treno sono riportati nella Tabella 3.3.3.

O-D	A-F_1	A-B	F_1-B
Tariffa	42,35	53,20	18,59

Tabella 3.1: Tariffe per le tre possibili O-D coperte dal treno

Il numero di posti disponibili sul treno è pari a 700.

O-D	A-F_1	A-B	F_1-B
μ	420	355	335

Tabella 3.2: Domanda prevista per le tre possibili O-D coperte dal treno

All'inizio del periodo di prenotazione la domanda per ciascuna origine-destinazione (O-D) è incerta, ma è nota una previsione sulla domanda il cui valor (medio) μ è riportato in Tabella 3.3.3.

Il problema consiste nel determinare quanti posti vendere su ciascuna Origine -Destinazione (O-D) coperta dal treno in modo da massimizzare il profitto.

Formulazione.
Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare che rappresenti il problema in analisi tenendo presente i requisiti richiesti. Si assume che la domanda effettiva per ciascuna origine-Destinazione sarà almeno pari al valor medio μ.

– *Variabili.* È naturale associare la variabili di decisione alle quantità di posti prenotabili su ciascuna Origine-Destinazione possibile. In questo caso, sono le tre variabili x_{12}, x_{13} e x_{23} che rappresentano rispettivamente i posti prenotabili sulla tratta A-F_1, A-B, F_1-B.

– *Funzione obiettivo.* È rappresentata dal profitto (atteso) relativo alla vendita e quindi è data da $42,35x_{12} + 53,20x_{13} + 18,59x_{23}$. Questa espressione naturalmente deve essere massimizzata.

– *Vincoli.* Osserviamo innanzitutto che, poiché per ipotesi si avranno almeno μ domande per ciascuna Origine-Destinazione, è necessario imporre i vincoli

$$\begin{aligned} x_{12} &\leq 420 \\ x_{13} &\leq 355 \\ x_{23} &\leq 335 \end{aligned}$$

in quanto non è sensato prenotare più posti della domanda effettiva.

Inoltre devono essere imposti i vincoli legato alla capacità di posti del treno. In particolare, nel tratto da A ad F_1 sono presenti sia i viaggiatori che si recano da A ad F_1 che quelli che vanno da A ad B. cosí nel tratto dal F_1 a B sono presenti sia i viaggiatori che vanno da A ad B che quelli che vanno da F_1 a B. Avremo quindi 2 vincoli

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} &\leq 700 \\ x_{23} + x_{13} &\leq 700 \end{aligned}$$

Infine si deve esplicitare il vincolo di non negatività sulle variabili cioè $x_{12}, x_{23}, x_{13} \geq 0$.
In principio le variabili rappresentano dei posti, e quindi si dovrebbero esplicitare anche i vincoli di interezza. Questi vincoli possono essere omessi come sarà chiarito in un prossimo capitolo.

Quindi la formulazione finale è

$$\begin{array}{ll} \max & 42,35x_{12} + 53,20x_{13} + 18,59x_{23} \\ & x_{12} + x_{13} \leq 700 \\ & x_{23} + x_{13} \leq 700 \\ & 0 \leq x_{12} \leq 420 \\ & 0 \leq x_{13} \leq 355 \\ & 0 \leq x_{23} \leq 335 \\ & (x_{12}, x_{23}, x_{13} \text{ intere}) \end{array}$$

3.3.4 Minimizzazione dello scarto massimo

Un caso di particolare interesse nei problemi di approssimazione del tipo 2.4.5 consiste nel caso in cui sono noti n punti del piano (x_i, y_i) che possono corrispondere a dati sperimentali o a misurazioni e si vuole approssimare la funzione $y = \Phi(x)$ con un polinomio di primo grado (ovvero una retta) del tipo $y = ax + b$ in cui vuole minimizzare

1. minimizzazione del massimo valore assoluto dell'errore
$$\min \max_{1 \leq i \leq m} |e_i(x)|.$$
2. minimizzazione della somma dei valore assoluto dell'errore
$$\min \sum_{i=1}^{m} |e_i(x)|.$$

Soluzione Si vuole costruire un modello di Programmazione Lineare utilizzando le trasformazioni nel paragrafo 3.2.

– *Variabili.* Le variabili sono naturalmente i valori di $a, b \in R$.
– *Funzione obiettivo* min max. Nel primo caso la funzione obiettivo è

$$f(m, q) = \max_{t=0,1,2,3} \{|at + b - y(t)|\} = \max\{|b|, |a + b - 1|, |2a + b - 4|, |3a + b - 9|\}.$$

– *Vincoli.* Non ci sono vincoli espliciti, ma per poter ricondurre il problema di

$$\min_{a,b} \max\{|b|, |a + b - 1|, |2a + b - 4|, |3a + b - 9|\}$$

ad un problema di Programmazione Lineare è necessario introdurre una *variabile aggiuntiva* $x \in R$ ed i vincoli
$$\max\{|b|, |a + b - 1|, |2a + b - 4|, |3a + b - 9|\} \leq x.$$
Si ottiene il problema di PL:
$$\begin{cases} \min_{a,b,x} x \\ -x \leq b \leq x \\ -x \leq a + b - 1 \leq x \\ -x \leq 2a + b - 4 \leq x \\ -x \leq 3a + b - 9 \leq x \\ x \geq 0. \end{cases}$$
osserviamo che il vincolo $x \geq 0$ è implicato dagli altri vincoli e dunque puo' essere eliminato.

– *Funzione obiettivo "somma di moduli".* Nel secondo caso la funzione obiettivo è

$$f(m, q) = \sum_{t=0,1,2,3} |at + b - y(t)| = |b| + |a + b - 1| + |2a + b - 4| + |3a + b - 9|.$$

– *Vincoli.* Non ci sono vincoli espliciti, ma per poter ricondurre il problema di

$$\min_{a,b} (|b| + |a + b - 1| + |2a + b - 4| + |3a + b - 9|)$$

ad un problema di Programmazione Lineare è necessario introdurre le *variabile aggiuntive* $x_i \in R$, $i = 1, \ldots, 4$ ed i vincoli

$$|b| \leq x_1 \quad |a + b - 1| \leq x_2 \quad |2a + b - 4| \leq x_3 \quad |3a + b - 9| \leq x_4.$$

Si ottiene il problema di PL:

$$\begin{cases} \min_{(a,b)\in R^2, x\in R^4} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ -x_1 \leq b \leq x_1 \\ -x_2 \leq a + b - 1 \leq x_2 \\ -x_3 \leq 2a + b - 4 \leq x_3 \\ -x_4 \leq 3a + b - 9 \leq x_4. \end{cases}$$

osserviamo che anche in questo caso il vincolo $x \geq 0$ è implicato dagli altri vincoli e dunque puo‘ essere eliminato.