TESTO CON SOLUZIONE 1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (6-9 cfu)

MMER-BGER 10 gennaio 2011

Cognome	Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

Esercizio 1. (**4,5 punti**)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{x\in I\!R^3} \frac{4}{3}x_1^3 - x_1^2x_3 + \frac{11}{6}x_3^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2$$

(i) (**2 punti**) Dire se la funzione è convessa o non convessa giustificando la risposta.

(ii) (**0,5 punti**) Dire se il punto $(1,\ -5,\ 3)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo ordine e discuterne la natura.

(ii) (**0,5 punti**)Dire se nel punto $(0,\ 0,\ 0)^T$ la direzione $d = (-1\ ,-2,\ \ -1)^T$ è di discesa, giustificando la risposta.

(iii) (**1.5 punto**) Scrivere l'approssimazione quadratica della funzione nell'intorno del punto $x^0 = (0,\ 0,\ \ -1)^T$ e dire se è possibile affermare che ammette un unico punto di minimo globale.

Soluzione. (i) Risulta

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 - 2x_1x_3 + 2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4 \\ -x_1^2 + \frac{11}{3}x_3 + 2x_2 \end{pmatrix} \qquad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 2x_3 & 0 & -2x_1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2x_1 & 2 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

L'elemento $8x_1 - 2x_3$ sulla diagonale può assumere valori positivi, negativi, nulli. Dunque la matrice $\nabla^2 f(x)$ non risulta semidefinita positiva. La fuzione NON è convessa.

(ii) Nel punto $\bar{x} = (1,\ \ -5,\ 3)^T$ risulta $\nabla f(\bar{x}) = 0$ dunque $\bar{x}$ soddisfa le condizione necessarie del primo ordine. Per studiare la natura, si calcola la matrice hessiana

$$\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

Il determinante risulta essere det$\nabla^2 f(\bar{x}) = -\frac{4}{3} < 0$ dunque la matrice $\nabla^2 f(\bar{x}) \not\succeq 0$ e $\bar{x}$ non è un punto di minimo locale. Si osserva che $\nabla^2 f(\bar{x}) \not\preceq 0$ e dunque non si tratta nenache di un massimo. Il punto $\bar{x}$ è un punto di sella.

(iii) L'approssimazione quadratica $f(x^0) + \nabla f(x^0)^T(x - x^0) + \frac{1}{2}(x - x^0)^T \nabla^2 f(x^0)(x - x^0)$ nel punto $x^0 = (0,\ 0,\ -1)^T$ è data da

$$\frac{11}{6} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 + 1 \end{pmatrix}$$

La matrice hessiana $\nabla^2 f(x^0)$ risulta essere definita positiva (i minore principali compreso il determinante $= 20/3$ sono > 0), dunque la funzione quadratica corrispondente ammette un unico minimo globale.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo è la stessa dell'Esercizio 1)

$$\begin{array}{rl} \min & \frac{4}{3}x_1^3 \quad -x_1^2 x_3 + \frac{11}{6}x_3^2 + x_2^2 + 2x_2 x_3 + 2x_1 + 4x_2 \\ & 5x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + & x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{array}$$

(i) (**0,5 punti**) Dire se il problema è convesso

(ii) (**3.5 punti**) Dire se esistono direzione ammissibili e di discesa nel punto $(\frac{1}{2},\ 1,\ 0)^T$ e in caso affermativo determinare una tale direzione. Definire inoltre il procedimento per il calcolo del passo massimo $\alpha_{\max}$ che è possibile effettuare lungo tale direzione mantenendo ammissibilità e valore della funzione obiettivo non superiore rispetto a quello nel punto assegnato.

(iii) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT. Calcolare i moltiplicatori nel punto $(\frac{1}{2},\ 1,\ 0)^T$ e dire se le condizioni di KKT sono/non sono verificate.

Soluzione. (i) La regione ammissibile è un poliedro convesso. La funzione obiettivo NON è convessa (vedi es. 1). Dunque il problema dato NON è convesso. (ii) Verifico che il punto $\hat{x} = (\frac{1}{2},\ 1,\ 0)^T$ sia ammissbile. I vincoli attivi sono $I(\hat{x}) = \{2, 4\}$, dunque le direzioni ammissbili $d \in R^3$ soddisfano il sistema

$$a_2^T d = 2d_1 + d_2 - d_3 = 0$$
$$a_4^t d = d_3 \geq 0$$

Condizione sufficiente affinche una direzione sia di discesa è che $\nabla f(\hat{x})^T d < 0$ che fornisce l'ulteriore condizione

$$3d_1 + 6d_2 + \frac{7}{4}d_3 < 0.$$

Il sistema

$$\begin{cases} 2d_1 + d_2 - d_3 = 0 \\ d_3 \geq 0 \\ 3d_1 + 6d_2 + \frac{7}{4}d_3 < 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni, infatti scegliendo ad esempio $d_3 = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} -2d_1 = d_2 \\ -9d_1 < 0 \end{cases}$$

dunque una qualunque direzine del tipo $\bar{d} = (\beta, \quad -2\beta, \quad 0)^T$ con $\beta > 0$ risulta ammissibile e di discesa. Scegliamo $\beta = \frac{1}{2}$, e di conseguenza $\bar{d} = (\frac{1}{2}, \quad -1, \quad 0)^T$. Si defisce dunque il punto

$$x(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha \\ 1 - \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

e per il calcolo del passo $\alpha_{\max} \geq 0$ devo verificare le condizioni di ammissbilità sui vincoli NON attivi in $\hat{x}$, cioè

$$\begin{aligned} &5x_2(\alpha) + 2x_3(\alpha) \leq 6 \\ &x_1(\alpha) \geq 0 \end{aligned}$$

e la condizione di non salita, come richiesto dall'esercizio, $f(x(\alpha)) \leq f(\hat{x})$. Si deve quindi determinare la soluzione $\alpha \geq 0$ del sistema

$$\begin{cases} 5(1-\alpha) \leq 6 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha \geq 0 \\ \frac{4}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha)^3 + (1-\alpha)^2 + 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha) + 4(1-\alpha) \leq 6 + \frac{1}{6} \end{cases}$$

Le prime due condizioni sono soddisfatte per ogni valore di $\alpha \geq 0$; l'ultima per valori di α che soddisfano la disequazione

$$\frac{1}{3}\alpha(\alpha^2 + 9\alpha - 27) \leq 0$$

(iii) Le condizione di KKT sono la stazionarietà:

$$\begin{pmatrix} 4x_1^2 - 2x_1x_3 + 2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4 \\ -x_1^2 + \frac{11}{3}x_3 + 2x_2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

complementarità per i vincoli di disuguaglianza

$$\begin{aligned} &\lambda_1(6 - 5x_2 - 2x_3) = 0 \\ &\lambda_2 x_1 = 0 \\ &\lambda_3 x_3 = 0, \end{aligned}$$

e non negatività dei moltiplicatori dei vincoli di disuguaglianza $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$. Nel punto dato NON possono essere verificate in quento abbiamo già verificato che esiste una direzione ammissbile e di discesa. Infatti risulta $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = 0$ dalla complementarità e il sistema si riduce

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

che non ammette soluzione !

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P) (n.b.: è il poliedro dell'Esercizio 2 con l'aggiunta del vincolo $x_2 \geq 0$)

$$
\begin{array}{rl}
\min\ x_1+ & 3x_2 + x_3 \\
 & 5x_2 + 2x_3 \leq 6 \\
2x_1+ & x_2 - x_3 = 2 \\
x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

(i) (**2 punto**) Individuare tutti i vertici del poliedro.

(ii) (**0,5 punto**) Porre il problema in forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso.

(iii) (**3 punti**) Individuare tutte le Soluzione di Base Ammissibile del poliedro in forma standard e per ognuna indicare le variabili di base e fuori base con la matrice di base corrispondente.

(iv) (**1,5 punti**) Scegliere una delle SBA ottenute al passo precedente, calcolare i coefficienti di costo ridotto e dire se è soddisfatto il criterio di ottimalità usato dal metodo del simplesso.

Soluzione. Osserviamo che il punto (i) e (iii) sono "equivalenti" nel senso che dalla soluzione di (i) si trova anche quella per (iii) o viceversa con semplici calcoli, ricordando la relaizone tra vertici e SBA.

(i) Si utilizza il teorema di caratterizzazione dei vertici ricordando che il vincolo 2 è di uguaglianza e dunque sempre attivo.

$$
\begin{array}{ll}
I = \{1,2,3\} & x_1 = 0,\ x_2 = 10/7,\ x_3 < 0,\ \text{non ammissibile} \\
I = \{1,2,4\} & x_2 = 0,\ x_1 = 5/2,\ x_3 = 3,\ \text{vertice 1} \\
I = \{1,2,5\} & x_3 = 0,\ x_1 = 2/5,\ x_2 = 6/5,\ \text{vertice 2} \\
I = \{2,3,4\} & x_1 = x_2 = 0,\ x_3 < 0,\ \text{non ammissibile} \\
I = \{2,3,5\} & x_1 = x_3 = 0,\ x_2 = 2,\ \text{non ammissibile} \\
I = \{2,4,5\} & x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = 1,\ \text{vertice 3}
\end{array}
$$

(ii) Si aggiunge una variabile di slack $s \geq 0$ ottenendo

$$
\begin{array}{rl}
\min\ x_1+ & 3x_2 + x_3 \\
 & 5x_2 + 2x_3 + s = 6 \\
2x_1+ & x_2 - x_3 \qquad = 2 \\
x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ s \geq 0
\end{array}
$$

(iii) Le SBA del problema (ii) corrispondono ai vertici del poliedro. Dunque sono tre

$$
\begin{array}{l}
s = 0,\ x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 3 \end{pmatrix},\ x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ s \end{pmatrix} = 0,\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
s = 0,\ x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ 6/5 \end{pmatrix},\ x_N = \begin{pmatrix} x_3 \\ s \end{pmatrix} = 0,\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
s = 6,\ x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix},\ x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

(iv) Si sceglie la SBA $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. I coefficienti di costo ridotto sono

$$
\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = (\,3 \quad 1\,) - (\,1 \quad 0\,) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (\,5/2 \quad 3/2\,) > 0
$$

La SBA scelta soddisfa il criterio sufficiente di ottimalità, dunque è ottima.

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P) (n.b.: è il poliedro dell'Esercizio 2, NON del 3)

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & 5x_2 + 2x_3 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

(i) (**3,5 punti**) Scrivere il problema duale e risolverlo graficamente.

(ii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare, se esiste, la soluzione ottima del problema primale.

(iii) (**2 punti**) Si aggiunga al poliedro il vincolo $x_2 \ge 0$. Discutere come cambia la soluzione del problema duale e del problema primale.

Soluzione. (i) Si deve riportare il problema in una forma standard per la costruzione del duale, o cambiando il segno alla funzione obiettivo o al vincolo di disuguaglianza. Si scelga ad es.

$$\begin{array}{ll} \max & -x_1 - 3x_2 - x_3 \\ & 5x_2 + 2x_3 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ & x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{array}$$

Dunque il duale è

$$\begin{array}{ll} \min & 6u_1 + 2u_2 \\ & 2u_2 \ge -1 \\ & 5u_1 + u_2 = -3 \\ & 2u_1 - u_2 \ge -1 \\ & u_1 \ge 0 \end{array}$$

Graficando la regione ammissibile risulta vuota (l'intersezione dell'iperpiano $5u_1 + u_2 = -3$ con il poliedro individuato dagli altri vincoli è vuota).

(ii) Dunque il problema primale non ammette soluzione ottima e può o avere insieme ammissibile vuoto oppure essere illimitato superiormente. Poiché esiste una soluzione ammissbile primale (il poliedro è contenuto nel poliedro dell'esercizio 3 e dunque un qualunque vertice trovato al passo (i) dell'esercizio 3 è ammissibile), il problema primale risulta essere illimitato superiormente.

(iii) Se al primale si aggiunge il vincolo $x_2 \ge 0$ (ovvero si considera il problema dell'esercizio 2) il vincolo duale di uguaglianza diventa di diseguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min & 6u_1 + 2u_2 \\ & 2u_2 \geq -1 \\ & 5u_1 + u_2 \geq -3 \\ & 2u_1 - u_2 \geq -1 \\ & u_1 \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

La regione ammissibile non è più vuota ed esiste una soluzione ottima. Disegnando le rette di livello della f.o $6u_1 + 2u_2 = k$ ortogonali al vettore $(6,\ 2)^T$ si determina la soluzione ottima $u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ di valore -1. Anche il problema primale ammette soluzione ottima che è il vertice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ individuato nell'esercizio 2.

Esercizio 5 (5 punti)

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare intera

$$\begin{array}{ll} \min & 6x_1 + 2x_2 \\ & 2x_2 \geq -1 \\ & 5x_1 + x_2 \geq -3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x \text{ intero} \end{array}$$

Utilizzando il metodo del Branch and Bound determinare una soluzione ottima, indicando i sottoproblemi generati e i valori di lower e upper bound ottenuti.

Soluzione. Si osservi che il problema intero assegnato corrisponde al duale (1) a cui è stato aggiunto il vincolo di interezza. Si rioslve dunque il rilassamento lineare (esercizio 4 (iii)) ottenendo la solzuione NON intera $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ in corrispondenza della quale si ottiene il valore di lower bound $c^T x^* = -1$. Per l'upper bound (o ottimo corrente) si può individuare una soluzione intera oppure porre $U^0 = +\infty$. Si separa rispetto ad x_2 ottenendo due sottoproblemi

$$\begin{array}{ll} \min & 6x_1 + 2x_2 \\ & 2x_2 \geq -1 \\ & 5x_1 + x_2 \geq -3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x \text{ intero} \\ & x_2 \leq -1 \end{array}$$

il poliedro è vuoto.
Chiudo.

$$\begin{array}{ll} \min & 6x_1 + 2x_2 \\ & 2x_2 \geq -1 \\ & 5x_1 + x_2 \geq -3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0, \quad x \text{ intero} \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

la soluzione ottima è intera $= (0 \ \ 0)^T$
aggiorno ottimo corrente e chiudo.

La soluzione ottima del problema è $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di valore $c^T x^* = 0$.