

1^a PROVA scritta di
RICERCA OPERATIVA (9 cfu)
12 gennaio 2010

Cognome

Nome

VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, autorizzo al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma non autorizzo

Esercizio 1. (4,5 punti)

Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3$$

- (i) **(2 punti)** Dire se la funzione è convessa (strettamente o non) giustificando la risposta.
- (ii) **(0,5 punti)** Dire se il punto $(0, 0, 0)^T$ soddisfa le condizioni necessarie del primo.
- (ii) **(1.5 punto)** Discutere l'esistenza/non esistenza di minimi globali della funzione.
- (iv) **(0,5 punti)** Dire se nel punto $(0, 0, 0)^T$ la direzione $d = (-1, -2, -1)^T$ è di discesa, giustificando la risposta.

Esercizio 2. (5 punti)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare

$$\min x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6$$

$$2x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

- (i) **(0,5 punti)** Dire se il problema è convesso
- (ii) **(2,5 punti)** Dire se nel punto $(1, 1, 0)^T$ esistono direzioni ammissibili e di discesa e il passo e calcolare una con il corrispondente valore di α_{\max}
- (iii) **(2 punti)** Scrivere le Condizioni di KKT e dire se nel punto $(1, 0, \frac{5}{2})^T$ sono/non sono verificate.

Esercizio 3. (6 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\
& x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

- (i) **(0,5 punto)** Porre il problema in forma standard per l'utilizzo del metodo del simplesso.
- (ii) **(3,5 punti)** Individuare tutte le Soluzione di Base Ammissibile del poliedro in forma standard. Scegliere una delle SBA ottenute ed indicare le variabili di base e fuori base con la matrice di base corrispondente.
- (iii) **(2 punti)** Calcolare i coefficienti di costo ridotto nella SBA considerata al passo precedente.

Esercizio 4. (8,5 punti)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P)

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\
& x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

- (i) **(3,5 punti)** Scrivere il problema duale e risolverlo graficamente.
- (ii) **(3 punti)** Utilizzando la teoria della dualità, determinare, se esiste, la soluzione ottima del problema primale.
- (iii) **(2 punti)** Dire se e come cambia la soluzione ottima se il termine noto del secondo vincolo cambia da 2 a $2 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Esercizio 3 (5 punti)

Utilizzando il metodo del Branch and Bound determinare una soluzione del seguente problema di Knapsack:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 6x_1 + 4x_3 + 0.8x_4 + 6x_5 + 1.4x_6 + 0.8x_7 \\
& 2x_1 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 + 2x_6 + 2x_7 \leq 7 \\
& x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 7.
\end{aligned}$$

Esercizio 6 (2.5 punti)

Dato il grafo di figura 2, effettuare una numerazione topologica dei nodi e determinare l'albero dei cammini minimi.

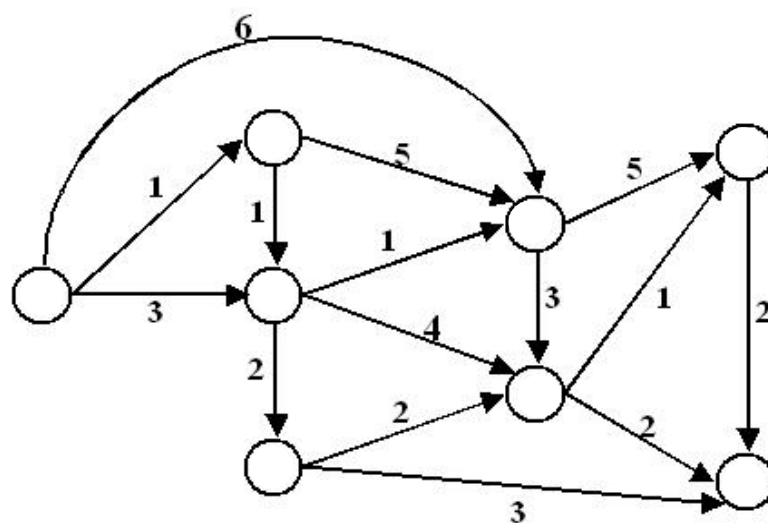


Figure 1: Grafo di esercizio

Soluzione

Esercizio 1. (4,5 punti)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 \\ -4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 \end{pmatrix} \quad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

- (i) Si tratta di verificare se $\nabla^2 f \succeq 0$. Il determinante è nullo, i minori di ordine uno sono gli elementi sulla diagonale e sono non negativi, i minori di ordine due sono:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque $\nabla^2 f \succeq 0$ e la funzione è convessa ma non strettamente convessa.

- (ii) Non soddisfa; risulta infatti

$$\nabla f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

- (iii) Si tratta di una funzione quadratica convessa. Dunque ammette minimo se e solo se il sistema $\nabla f(x) = 0$ ammette soluzione. La funzione non ammette minimo in quanto il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

non ammette soluzione perché la seconda equazione non può mai essere soddisfatta da punti che soddisfano la prima e la terza.

- (iv) Sì la direzione è di discesa in quanto $d = -\nabla f(0)$ e dunque $\nabla f(0)^T d = -\|\nabla f(0)\|^2 = -4 < 0$.

Esercizio 2.

- (i) Il problema è convesso perché la funzione obiettivo quadratica è convessa (NB è la stessa funzione dell'esercizio precedente) e i vincoli sono lineari. Dunque si tratta della minimizzazione di una funzione convessa su un poliedro convesso.

- (ii) Nel punto $\hat{x} = (1, 1, 0)^T$ sono attivi i vincoli $\{1, 5\}$ e il gradiente vale $\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$,

dunque il sistema da risolvere (NB: il primo vincolo è di uguaglianza)

$$\begin{cases} d_1 + 5d_2 + 2d_3 = 0 \\ d_3 \geq 0 \\ -d_1 + 6d_2 - d_3 < 0 \end{cases}$$

Esistono soluzioni al sistema (dunque il punto dato non è minimo). Una possibile soluzione si ottiene ponendo $d_3 = 0$, da cui $d_1 = -5d_2$ e $11d_2 < 0$. Scegliendo $d_2 = -1$ si ha

$$d = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_{\max} = 1$$

(iii) Le condizioni di KKT sono:

ammissibilità

$$\begin{aligned}x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 6 \\2x_1 + x_2 &\geq 2 \\x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

stazionarietà

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 \\ -4x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

complementarità

$$\begin{aligned}\lambda_1(2 - 2x_1 - x_2) &= 0 \\ \lambda_2 x_1 = 0, \lambda_3 x_2 = 0, \lambda_4 x_3 &= 0\end{aligned}$$

non negatività $\lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, 4$

Nel punto $(1, 0, \frac{5}{2})^T$ deve necessariamente risultare $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$. Sostituendo nelle condizioni di stazionarietà si ottiene

$$\begin{aligned}8 + \mu - 2\lambda_1 &= 0 \\ -12 + 5\mu - \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \\ 8 + 2\mu &= 0\end{aligned}$$

Da cui $\mu = -4, \lambda_1 = 2, \lambda_3 = -34$. Il punto NON soddisfa le KKT perché $\lambda_3 \not\geq 0$.

Esercizio 3.

(i) per porre il problema nella forma standard è necessario introdurre una variabili di “surplus” $x_4 \geq 0$ ottenendo così:

$$\begin{aligned}\min \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \\ & x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0\end{aligned}$$

(ii) Ricordando la caratterizzazione dei vertici (\equiv definizione di SBA) di un poliedro in forma standard possiamo esaminare i seguenti casi

- (a) $x_1 = x_2 = 0$ (non ammissibile)
- (b) $x_1 = x_3 = 0$ (non ammissibile)
- (c) $x_1 = x_4 = 0$ (non ammissibile)
- (d) $x_2 = x_3 = 0, x_1 = 6, x_4 = 10$ (SBA)
- (e) $x_2 = x_4 = 0, x_1 = 1, x_3 = \frac{5}{2}$ (SBA)
- (f) $x_3 = x_4 = 0, x_1 = \frac{4}{9}, x_2 = \frac{10}{9}$ (SBA).

Consideriamo la SBA $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$; le variabili di base $x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, le variabili fuori

base $x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$; la matrice di base $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

- (iii) La formula dei coefficienti di costo ridotto $\gamma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$ richiede il calcolo dell'inversa $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Dunque sostituendo si ottiene

$$\gamma^T = (3 \quad 1) - (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-2 \quad -1)$$

Esercizio 4. (N.B. Il problema è lo stesso dell'esercizio 3)

- (i) Il problema duale è

$$\begin{aligned} \max \quad & 6u_1 + 2u_2 \\ & u_1 + 2u_2 \leq 1 \\ & 5u_1 + u_2 \leq 3 \\ & 2u_1 \leq 1 \\ & u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

dalla soluzione grafica si determina il punto ottimo $u^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ di valore ottimo $b^T u^* = \frac{7}{2}$.

- (ii) dalla teoria della dualità esiste una soluzione primale. Dalle cond. di complementarità deriva che entrambi i vincoli del primale devono essere soddisfatti all'uguaglianza e che $x_2^* = 0$ deve essere zero (il secondo vincolo duale NON è attivo in u^* . Dunque si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 = 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. (N.B. il punto era stato già determinato come vertice dell'esercizio precedente.)

- (iii) Il secondo vincolo è attivo e il valore della variabile duale (prezzo ombra) corrispondente è $\frac{1}{4}$ dunque la f.o. varia di $-\frac{1}{4}\varepsilon$.

Esercizio 3 (5 punti) Riordino le variabili secondo il rapporto peso/ingombro

$$\begin{aligned} \max \quad & 6y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 0.8y_4 + 1.4y_5 + 0.8y_6 \\ & 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 7 \\ & y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 7. \end{aligned}$$

Si determina la soluzione del rilassamento $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di valore $U^0 = 14$ e una soluzione intera (ottimo

corrente) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di valore $z_I = 12$. Separazione rispetto a y_3 , si ottengono i due problemi

$$\begin{aligned} \max & 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 + 1.4y_5 + 0.8y_6 \\ & 2y_1 + 3y_2 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 7 \\ & y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 7. \end{aligned} \quad y_3 = 0 \quad (P^1)$$

$$\begin{aligned} \max & 6y_1 + 6y_2 + 4 + 0.8y_4 + 1.4y_5 + 0.8y_6 \\ & 2y_1 + 3y_2 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 \leq 3 \\ & y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 7. \end{aligned} \quad y_3 = 1 \quad (P^2)$$

La soluzione del rilassamento di (P^1) è: $x^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ di valore $U^1 = 13.5$; non è possibile chiudere il

problema (P^1) . La soluzione del rilassamento di (P^2) è: $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di valore $U^2 = 12$ pari all'ottimo

corrente; il problema (P^2) si chiude.

Separazione di (P^1) rispetto a y_5 , si ottengono i due problemi

$$\begin{aligned} \max & 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 + 0.8y_6 \\ & 2y_1 + 3y_2 + y_4 + 2y_6 \leq 7 \\ & y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 7. \end{aligned} \quad y_5 = 0 \quad (P^3)$$

$$\begin{aligned} \max & 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 + 1.4 + 0.8y_6 \\ & 2y_1 + 3y_2 + y_4 + 2y_6 \leq 5 \\ & y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 7. \end{aligned} \quad y_5 = 1 \quad (P^4)$$

Si ottengono i valori $x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ di valore $U^3 = 13.6$ e $x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ INTERO di valore $U^4 = 13.4$

dunque si aggiorna l'ottimo corrente $z_I = 13.4$ e si chiude il problema (P^4) .

Separazione di (P^3) rispetto a y_6 , si ottengono i due problemi

$$\begin{aligned} \max & 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 \\ & 2y_1 + 3y_2 + y_4 \leq 7 \\ & y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 7. \end{aligned} \quad y_6 = 0 \quad (P^5)$$

$$\begin{aligned}
 & \max 6y_1 + 6y_2 + 0.8y_4 + 0.8 \\
 & 2y_1 + 3y_2 + y_4 \leq 5 \qquad y_6 = 1 \\
 & y_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, 7.
 \end{aligned}
 \tag{P^6}$$

Si ottengono due soluzioni entrambe intere di valore inferiore all'ottimo corrente. I due problemi sono chiusi. Non ci sono più problemi da analizzare. Dunque la soluzione è $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6

nodo	distanza	predecessore
1	0	\emptyset
2	1	1
3	3	2
4	4	3
5	3	3
6	6	{3, 4, 5, }
7	7	6
8	7	4

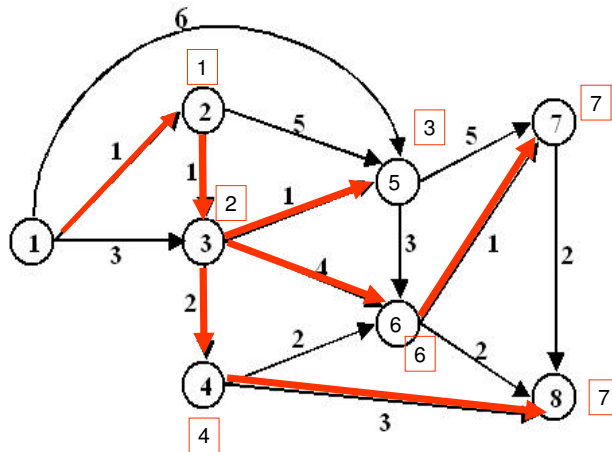


Figure 2: Grafo di esercizio