1^a PROVA scritta di

RICERCA OPERATIVA (6 cfu)

9 febbraio 2011

Cognome	Nome	
		VOTO

Ai fini della pubblicazione (cartacea e elettronica) del risultato ottenuto nella prova di esame, **autorizzo** al trattamento dei miei dati personali ai sensi della Legge 675/96 e successive modificazioni

Se NON si intende autorizzare al trattamento dei dati, apporre qui una firma **non autorizzo**

Esercizio 1. (**4,5 punti**) Sia dato il problema di ottimizzazione non vincolato:

$$\min \ f(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_1 - 2x_2 - x_3.$$

(i) (**2 punti**) Dire se la funzione è / non è convessa giustificando la risposta.

(ii) (**2 punti**) Determinare il/i punto/i che soddisfano le condizioni necessarie del primo ordine e stabilire se possibile, di che tipo di soluzioni si tratta (minimi/massimi/sella).

(iii) (**0,5 punti**) Dire se nel punto $(0,\ 0,\ 0)^T$ la direzione $d = (1\ ,2,\ \ -1)^T$ è di discesa, giustificando la risposta.

Esercizio 2. (**6 punti**)

Dato il seguente problema di ottimizzazione vincolata non lineare (n.b. la funzione obiettivo ‘e la stessa dellEsercizio 1)

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{array}$$

(i) (**0,5 punti**) Dire se il problema è convesso o concavo;

(ii) (**3.5 punti**) Dire se esistono e calcolare le direzioni ammissibili e di discesa nel punto $\bar{x} = (0,\ 2,\ 0)^T$ e in caso affermativo determinare una tale direzione d. Definire il procedimento per il calcolo del passo massimo $\alpha_{\max}$ che ‘e possibile effettuare lungo tale direzione in modo che il punto $\bar{x} + \alpha_{\max}d$ sia ammissibile e con valore della funzione obiettivo non superiore rispetto a quello in $\bar{x}$.

(iii) (**2 punti**) Scrivere le Condizioni di KKT. Calcolare i moltiplicatori nel punto $(0,\ 2,\ 0)^T$ e dire se le condizioni di KKT sono/non sono verificate.

Esercizio 3. (**7 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P) (n.b.: ‘e il poliedro dellEsercizio 2)

$$\begin{aligned} &\min \quad -x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) (2 punto) Individuare tutti i vertici del poliedro.

(ii) (0,5 punto) Porre il problema in forma standard per lutilizzo del metodo del simplesso.

(iii) (3 punti) Individuare tutte le Soluzione di Base Ammissibile del poliedro in forma standard e per ognuna indicare le variabili di base e fuori base con la matrice di base corrispondente.

(iv) (1,5 punti) Scegliere una delle SBA ottenute al passo precedente, calcolare i coefficienti di costo ridotto e dire se ‘e soddisfatto il criterio di ottimalità usato dal metodo del simplesso.

Esercizio 4. (**8,5 punti**)

Sia dato il problema di Programmazione lineare (P) (n.b.: ‘e il poliedro dellEsercizio 2 eliminando il vincolo $x_2 \geq 0$)

$$\begin{aligned} &\min \quad -x_1 - 5x_2 - 3x_3 \\ &x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ &x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ &x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

(i) (**3,5 punti**) Scrivere il problema duale e risolverlo graficamente.

(ii) (**3 punti**) Utilizzando la teoria della dualità, determinare, se esiste, la soluzione ottima del problema primale.

(iii) (**2 punti**) Dire se e come cambia la soluzione ottima se il termine noto del primo vincolo cambia da 3 a $3 - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$.

Esercizio 3 (5 punti)

Utilizzando il metodo del Branch and Bound determinare una soluzione del seguente problema di Knapsack:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + x_2 + 4x_3 + 0.9x_4 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 7 \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, 4. \end{aligned}$$