

Esercitazione per il corso di Ricerca Operativa

1 dicembre 2009

Laurea magistrale in

Ing. Meccanica e Ing. dei Sistemi di Trasporto

Laurea in Ing. dei Trasporti

Esempio 1 *Un'industria dell'acciaio dispone di due miniere M_1 e M_2 e di tre impianti di produzione P_1 P_2 P_3 . Il minerale estratto deve essere giornalmente trasportato agli impianti di produzione soddisfacendo le rispettive richieste. Le miniere M_1 e M_2 producono giornalmente rispettivamente 130 e 200 tonnellate di minerale. Gli impianti richiedono giornalmente le seguenti quantità (in tonnellate) di minerale*

P_1	P_2	P_3
80	100	150

Il costo (in migliaia di lire) del trasporto da ciascuna miniera a ciascun impianto di produzione è riportato nella seguente tabella

	P_1	P_2	P_3
M_1	10	8	21
M_2	12	20	14

Formulare un modello che descriva il trasporto dalle miniere agli impianti di produzione in modo da minimizzare il costo globale del trasporto.

Analisi del problema.

Poiché $\sum_i a_i = 130 + 200 = 330$ e $\sum_j b_j = 80 + 100 + 150 = 330$, è soddisfatta l'ipotesi di ammissibilità.

Formulazione.

– *Variabili.* Associamo le variabili di decisione alle quantità di minerale che deve essere trasportato; indichiamo con x_{ij} $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, le quantità (in tonnellate) di minerale da trasportare giornalmente da ciascuna miniera M_i a ciascun impianto di produzione P_j .

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo da minimizzare è data dalla somma dei costi dei trasporti cioè da

$$z = 10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}.$$

– *Vincoli.* I vincoli di origine esprimono il fatto che la somma della quantità di minerale trasportato dalla miniera \mathbf{M}_i deve essere uguale alla disponibilità giornaliera della miniera stessa:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 200. \end{aligned}$$

I vincoli di destinazione esprimono il fatto che la somma delle quantità di minerale trasportato all'impianto di produzione \mathbf{P}_j deve essere pari alla richiesta giornaliera di tale impianto:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} &= 80 \\ x_{12} + x_{22} &= 100 \\ x_{13} + x_{23} &= 150. \end{aligned}$$

Infine si devono considerare i vincoli di non negatività $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. La formulazione completa è quindi

$$\begin{cases} \min (10x_{11} + 8x_{12} + 21x_{13} + 12x_{21} + 20x_{22} + 14x_{23}) \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 130 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \\ x_{11} + x_{21} = 80 \\ x_{12} + x_{22} = 100 \\ x_{13} + x_{23} = 150 \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

□

Esempio 2 *Un hotel ha bisogno di disporre, nei quattro giorni successivi, di asciugamani puliti. Gli asciugamani possono essere comprati nuovi oppure lavati in lavanderia. Il costo di un nuovo asciugamano è di £1000. Se invece un asciugamano sporco viene mandato in lavanderia, può essere restituito dopo un giorno se si pagano £400, o dopo due giorni se si pagano £250.*

All'inizio del periodo considerato l'hotel non dispone di asciugamani (né sporchi né puliti). Sapendo che nei primi tre giorni sono necessari 300, 200, 400 asciugamani rispettivamente, e che si vuole che all'inizio del quarto giorno siano disponibili almeno 100 asciugamani, scrivere il problema di PL che permette di soddisfare queste esigenze al costo minimo.

Analisi del problema

Anche in questo caso, il problema può essere formulato come problema di flusso a costo minimo.

Formulazione

– *Variabili.* Per determinare quali sono le variabili di decisione si devono individuare le possibilità di acquisto e/o di lavaggio nei giorni considerati. Osserviamo che il primo ed il secondo giorno si possono usare solo asciugamani nuovi perché si suppone che la lavanderia lavori di giorno.

Distinguiamo i seguenti intervalli temporali:

T_1 : primo giorno; si possono utilizzare solo asciugamani nuovi. Indichiamo questa quantità con x^1 .

T_2 : il secondo giorno; si possono utilizzare solo asciugamani nuovi che indichiamo con x^2 . Si possono inoltre lavare asciugamani usati il primo giorno;

T_3 : il terzo giorno; si possono utilizzare asciugamani nuovi ed asciugamani lavati nel periodo T_2 . Indichiamo rispettivamente con x^3 e x_{12}^3 queste quantità.

Si possono inoltre lavare asciugamani usati il secondo giorno.

T_4 : quarto giorno; si possono utilizzare asciugamani nuovi oppure asciugamani utilizzati il primo giorno e lavati nel periodo T_2 o T_3 oppure asciugamani utilizzati il secondo giorno e lavati nel periodo T_3 . Indichiamo queste quantità rispettivamente con x^4 , x_{12}^4 , x_{13}^4 , x_{23}^4 .

Le variabili di decisione sono quindi le quantità di asciugamani utilizzati, cioè x_{ij}^k dove l'apice $k = 1, 2, 3, 4$ indica il giorno ed i pedici i, j rispettivamente il giorno in cui sono stati usati ed il periodo in cui sono lavati. Questa situazione è schematizzata nella seguente tabella:

		1° giorno	2° giorno	3° giorno	4° giorno
nuovi		x^1	x^2	x^3	x^4
lavati	T_2	-	-	x_{12}^3	x_{12}^4 x_{13}^4
	T_3	-	-	-	x_{23}^4

– *Funzione obiettivo.* La funzione obiettivo è il costo:

$$1000(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) + 400(x_{12}^3 + x_{12}^4 + x_{13}^4) + 250x_{23}^4$$

– *Vincoli.* I vincoli sono:

- *vincoli di domanda*

$$\begin{aligned}x^1 &= 300 \\x^2 &= 200 \\x^3 + x_{12}^3 &= 400 \\x^4 + x_{13}^4 + x_{23}^4 + x_{12}^4 &\geq 100\end{aligned}$$

- *vincoli di continuità*

$$\begin{aligned}x_{12}^3 + x_{12}^4 + x_{13}^4 &\leq x^1 \\x_{23}^4 &\leq x^2 \\x^4 + x_{12}^4 + x_{13}^4 + x_{23}^4 &\leq x^1 + x^2 + x^3 + x^4\end{aligned}$$

- *vincoli di non negatività e di interezza: $x^k \geq 0$ e $x_{ij}^k \geq 0$, e intere per ogni k, i, j .*

Complessivamente si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 1000(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) + 400(x_{12}^3 + x_{12}^4 + x_{13}^4) + 250x_{23}^4 \\ x^1 = 300 \\ x^2 = 200 \\ x^3 + x_{12}^3 = 400 \\ x^4 + x_{13}^4 + x_{23}^4 + x_{12}^4 \geq 100 \\ x_{12}^3 + x_{12}^4 + x_{13}^4 \leq x^1 \\ x_{23}^4 \leq x^2 \\ x^1 + x^2 + x^3 \geq x_{12}^4 + x_{13}^4 + x_{23}^4 \\ x^k \geq 0, x_{ij}^k \geq 0 \text{ per ogni } k, i, j \\ x^k, x_{ij}^k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$