Esercitazione per il corso di Ricerca Operativa
10 novembre 2009

Laurea magistrale in

Ing. Meccanica e Ing. dei Sistemi di Trasporto

Laurea in Ing. dei Trasporti

Formulazione 1

Una città deve essere rifornita, ogni giorno, con 500000 litri di acqua. Si richiede che l'acqua non contenga sostanze inquinanti in quantità superiore a 100 parti per milione. L'acqua può essere ottenuta da un fiume o da un pozzo. La quantità di acqua che può essere fornita dal fiume è illimitata, e un impianto di depurazione può depurarla in modo che il livello di inquinamento sia inferiore a 150 parti per milione ad un costo di lire 10000 ogni 5000 litri di acqua trattata o a 75 parti per milione ad un costo di lire 30000 per 5000 litri di acqua trattata. Il pozzo, invece, può fornire al più 200000 litri di acqua al giorno con un livello di inquinamento pari a 50 parti per milione. L'acqua fornita dal pozzo può, volendo, essere purificata mediante un processo sperimentale che riduce le impurità a 10 parti per milione. Il pompaggio dell'acqua del pozzo costa 40000 lire ogni 5000 litri e la stessa quantità di acqua può essere purificata mediante il processo sperimentale al costo di 15000 lire. Scrivere il problema di PL che permette di determinare il modo di soddisfare le esigenze idriche della città al costo minimo.

Formulazione.

– *Variabili di decisione.* Scegliamo come variabili di decisione le quantità di acqua (in litri) x_{1F} ottenuta dal fiume con procedimento di depurazione 1, x_{2F} ottenuta dal fiume con procedimento di depurazione 2, x_{1P} ottenuta dal pozzo senza depurazione, x_{2P} ottenuta dal pozzo con procedimento di depurazione.

– *Vincoli.* Si devono imporre i seguenti vincoli:

- Vincoli di domanda: la città deve essere rifornita con 500000 lt.di acqua:

$$x_{1F} + x_{2F} + x_{1P} + x_{2P} = 500000$$

- Vincoli di capacità: il pozzo può fornire al più 200000 lt. di acqua:

$$x_{1P} + x_{2P} \leq 200000.$$

- Vincoli di qualità: la qualità della miscela è misurata in parti di sostanze inquinanti per milione:

$$150x_{1F} + 75x_{2F} + 50x_{1P} + 10x_{2P} \leq 100(x_{1F} + x_{2F} + x_{1P} + x_{2P}).$$

- Vincoli di non negatività. si tratta di quantità acqua, quindi

$$x_{iF} \geq 0 \quad x_{iP} \geq 0 \quad i = 1, 2.$$

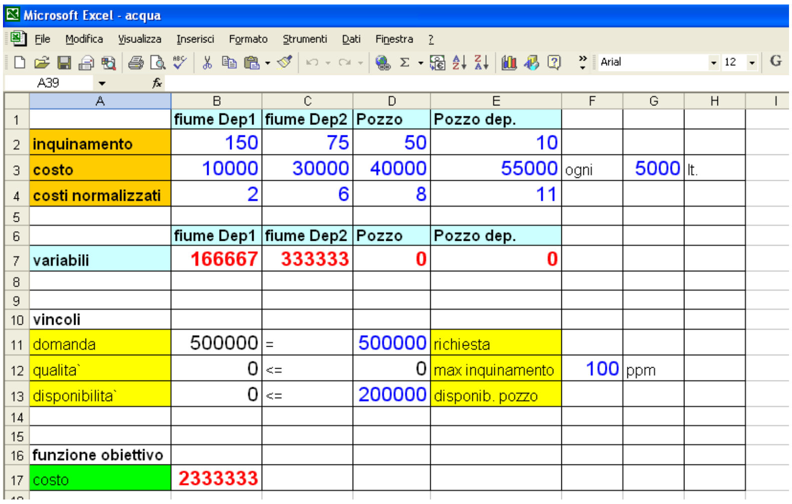
– *Funzione obiettivo.* È il costo da minimizzare. Il costo è diverso a seconda della sorgente e del trattamento effettuato. Poiché 5000 lt. di acqua del tipo $1F$ costano 10000, il costo di x_{1F} lt. di acqua è $(x_{1F}/5000)10000 = 2x_{1F}$, analogamente il costo di x_{2F} lt. di acqua prodotti con modalità x_{2F} è $(x_{2F}/5000)30000 = 6x_{2F}$. Per quanto riguarda l'acqua ottenuta dal pozzo, abbiamo che per la quantità x_{1P} dobbiamo pagare solo il pompaggio dato da: $(x_{1P}/5000)40000 = 8x_{1P}$, mentre per l'acqua sottoposta a trattamento dobbiamo pagare sia il pompaggio che la purificazione $(x_{2P}/5000)(40000 + 15000) = 11x_{2P}$. Quindi la funzione obiettivo è:

$$(10000x_{1F} + 30000x_{2F} + 40000x_{1P} + 55000x_{2P})/5000 = 2x_{1F} + 6x_{2F} + 8x_{1P} + 11x_{2P}.$$

Complessivamente possiamo scrivere il problema di PL

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_{1F} + 6x_{2F} + 8x_{1P} + 11x_{2P} \\ & x_{1F} + x_{2F} + x_{1P} + x_{2P} = 500000 \\ & x_{1P} + x_{2P} \leq 200000 \\ & 50x_{1F} - 25x_{2F} - 50x_{1P} - 90x_{2P} \leq 0 \\ & x_{iF} \geq 0, \quad x_{iP} \geq 0 \quad i = 1, 2. \end{array}$$

La tabella Microsof Excel è in figura 1. Il file corrispondente è disponibile in rete.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		fiume Dep1	fiume Dep2	Pozzo	Pozzo dep.			
2	inquinamento	150	75	50	10			
3	costo	10000	30000	40000	55000	ogni	5000	lt.
4	costi normalizzati	2	6	8	11			
5								
6		fiume Dep1	fiume Dep2	Pozzo	Pozzo dep.			
7	variabili	166667	333333	0	0			
8								
9								
10	vincoli							
11	domanda	500000	=	500000	richiesta			
12	qualita`	0	<=	0	max inquinamento	100	ppm	
13	disponibilita`	0	<=	200000	disponib. pozzo			
14								
15								
16	funzione obiettivo							
17	costo	2333333						

Figure 1: Tabella Excel del modello della formulazione 1

Formulazione 2

Una compagnia petrolifera possiede tre depositi. Ciascun deposito è riempito con un tipo di greggio che può essere venduto rispettivamente a \$15, \$17, \$20 al barile. I depositi hanno la capacità di 4000, 3000 e 5000 barili rispettivamente. La qualità dei tre tipi di greggio è misurata dai numeri 6.8, 7.4 e 8.1. La compagnia deve soddisfare i seguenti quattro ordini utilizzando il greggio nei depositi:

Ordine	Barili	Qualità della miscela
1	2000	almeno 7
2	1500	al piu' 7.8
3	2500	tra 7.0 e 8.0
4	3000	7.4

Formulare il problema di PL che permette di massimizzare la seguente funzione obiettivo

$$z = R - P|Q3 - 7.5|,$$

dove R è il ricavo totale, P una costante positiva assegnata e $Q3$ è la qualità della miscela destinata all'ordine 3. Si supponga che la qualità di una miscela sia funzione lineare delle percentuali dei componenti.

Analisi del problema
Si tratta di un modello misto trasporto-miscelazione. La funzione obiettivo è non lineare a causa della presenza del modulo e quindi è necessario usare una variabile aggiuntiva per scrivere il modello come PL.

Formulazione.
– *Variabili.* Le variabili di decisione sono le quantità di greggio i-esimo usato nella miscela relativa all'ordine j-esimo, indicate con x_{ij}, con $i = 1, \ldots, 3$ e $j = 1, \ldots, 4$.

– *Vincoli.* Per quanto riguarda i vincoli si hanno:

- *Vincoli di capacità.* I serbatoi possono contenere una prefissata quantità di greggio:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} \leq 4000$$
$$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} \leq 3000$$
$$\sum_{j=1}^{4} x_{3j} \leq 5000$$

- *Vincoli di qualità.* Ciascuna miscela deve soddisfare certi requisiti qualitativi espressi da:

$$6.8x_{11} + 7.4x_{21} + 8.1x_{31} \geq 7(\sum_{i=1}^{3} x_{i1})$$
$$6.8x_{12} + 7.4x_{22} + 8.1x_{32} \geq 7.8(\sum_{i=1}^{3} x_{i2})$$
$$7(\sum_{i=1}^{3} x_{i3}) \leq 6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} \leq 8(\sum_{i=1}^{3} x_{i3})$$
$$6.8x_{14} + 7.4x_{24} + 8.1x_{34} = 7.4(\sum_{i=1}^{3} x_{i4})$$

- *Vincoli di domanda.* Si deve soddisfare l'ordine:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 2000$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 1500$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 2500$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 3000$$

- *Vincoli di non negatività.* Si tratta di quantità di greggio utilizzate in ogni miscela:

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall\ i, j.$$

–*Funzione obiettivo.* Per quanto riguarda la funzione obiettivo osserviamo che non è lineare a causa della presenza della funzione modulo. Il ricavo R è dato da

$$R = 15\sum_{j=1}^{4} x_{1j} + 17\sum_{j=1}^{4} x_{2j} + 20\sum_{j=1}^{4} x_{3j}.$$

La qualità Q_3 della miscela 3 è data da:

$$Q_3 = \frac{6.8x_{1.3} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33}}{\sum_{i=1}^{3} x_{i3}} = \frac{6.8x_{1.3} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33}}{2500},$$

quindi la funzione obiettivo si può scrivere con l'aggiunta di una variabile v come:

$$R - Pv$$

Abbiamo poi i *vincoli aggiuntivi:*

$$-v \leq \frac{6.8x_{1.3} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33}}{2500} - 7.5 \leq v.$$

Complessivamente il problema di PL si scrive:

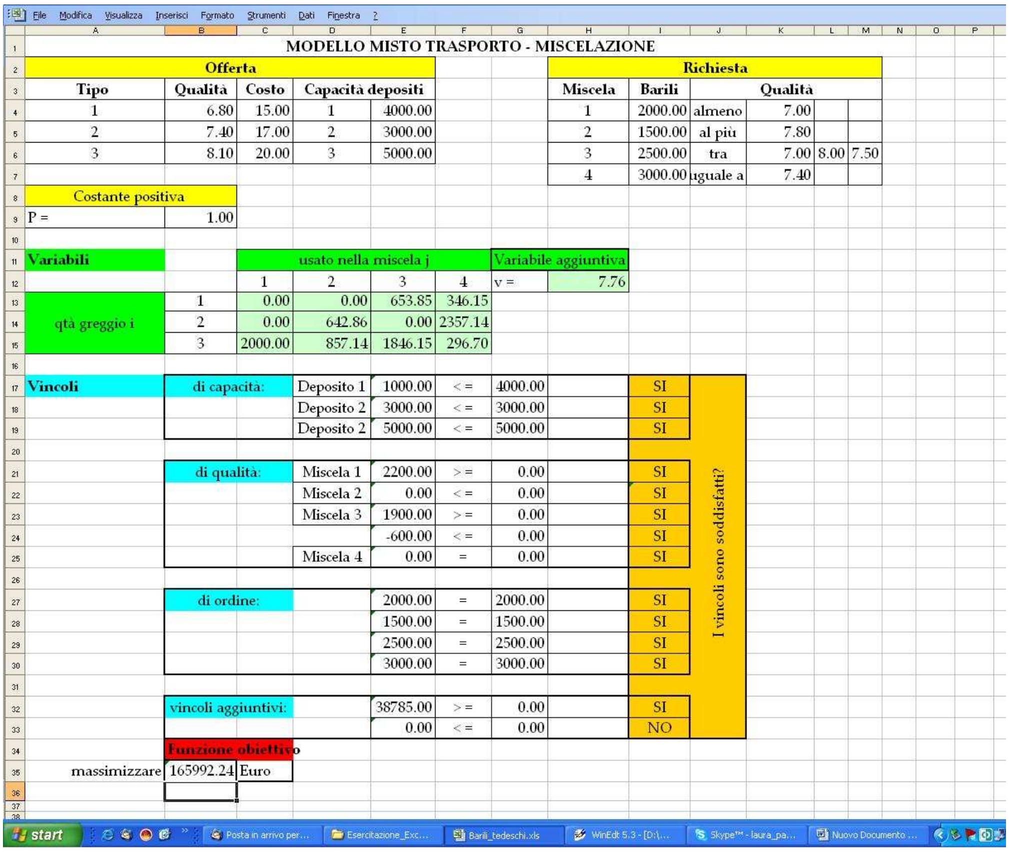
$$\begin{cases} \max 15\sum_{j=1}^{4} x_{1j} + 17\sum_{j=1}^{4} x_{2j} + 20\sum_{j=1}^{4} x_{3j} - Pv \\ \sum_{j=1}^{4} x_{1j} \leq 4000 \\ \sum\limits_{j=1}^{4} x_{2j} \leq 3000 \\ \sum\limits_{j=1}^{4} x_{3j} \leq 5000 \\ 6.8x_{11} + 7.4x_{21} + 8.1x_{31} \geq 7 \cdot 2000 \\ 6.8x_{12} + 7.4x_{22} + 8.1x_{32} \geq 7.8 \cdot 1500 \\ 6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} \geq 7 \cdot 2500 \\ 6.8x_{13} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} \leq 8 \cdot 2500 \\ 6.8x_{14} + 7.4x_{24} + 8.1x_{34} = 7.4 \cdot 3000 \\ \sum\limits_{i=1}^{3} x_{i1} = 2000 \\ \sum\limits_{i=1}^{3} x_{i2} = 1500 \\ \sum\limits_{i=1}^{3} x_{i3} = 2500 \\ \sum\limits_{i=1}^{3} x_{i4} = 3000 \\ 6.8x_{1.3} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} - 2500(7.5 + v) \leq 0 \\ 6.8x_{1.3} + 7.4x_{23} + 8.1x_{33} - 2500(7.5 - v) \geq 0 \\ x_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1, \dots 4. \end{cases}$$

Osservazione 1 Non è necessario, seppur non produce errore, imporre il vincolo di non negatività della variabile v.

Osservazione 2 Notiamo che è stato possibile trasformare la minimizzazione della funzione modulo in un problema equivalente lineare perché la quantità totale di miscela $\sum_i x_{i3}$ è costante. Altrimenti si avrebbe avuto il modulo di un rapporto di funzioni lineari.

La tabella Microsoft Excel corrispondente al modello con valore della costante $P = 10$ è in figura 2[1]. Il file Excel corrispondente al modello è disponibile in rete.

[1] Ringrazio lo studente Andrea Alfonso Tedeschi per aver reso disponibile il file realizzato durante l'esercitazione del 10-11-2009



A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
MODELLO MISTO TRASPORTO - MISCELAZIONE												
Offerta							Richiesta					
Tipo	Qualità	Costo	Capacità depositi				Miscela	Barili		Qualità		
1	6.80	15.00	1	4000.00			1	2000.00	almeno	7.00		
2	7.40	17.00	2	3000.00			2	1500.00	al più	7.80		
3	8.10	20.00	3	5000.00			3	2500.00	tra	7.00	8.00	7.50
							4	3000.00	uguale a	7.40		
Costante positiva												
P =	1.00											
Variabili		usato nella miscela j				Variabile aggiuntiva						
		1	2	3	4	v =	7.76					
qtà greggio i	1	0.00	0.00	653.85	346.15							
	2	0.00	642.86	0.00	2357.14							
	3	2000.00	857.14	1846.15	296.70							
Vincoli	di capacità:		Deposito 1	1000.00	< =	4000.00		SI	I vincoli sono soddisfatti?			
			Deposito 2	3000.00	< =	3000.00		SI				
			Deposito 2	5000.00	< =	5000.00		SI				
	di qualità:		Miscela 1	2200.00	> =	0.00		SI				
			Miscela 2	0.00	< =	0.00		SI				
			Miscela 3	1900.00	> =	0.00		SI				
				-600.00	< =	0.00		SI				
			Miscela 4	0.00	=	0.00		SI				
	di ordine:			2000.00	=	2000.00		SI				
				1500.00	=	1500.00		SI				
				2500.00	=	2500.00		SI				
				3000.00	=	3000.00		SI				
	vincoli aggiuntivi:			38785.00	> =	0.00		SI				
				0.00	< =	0.00		NO				
	Funzione obiettivo											
massimizzare	165992.24	Euro										

Figure 2: Tabella Excel del modello della formulazione 2