

# Controlli Automatici

Prof. Giuseppe Oriolo

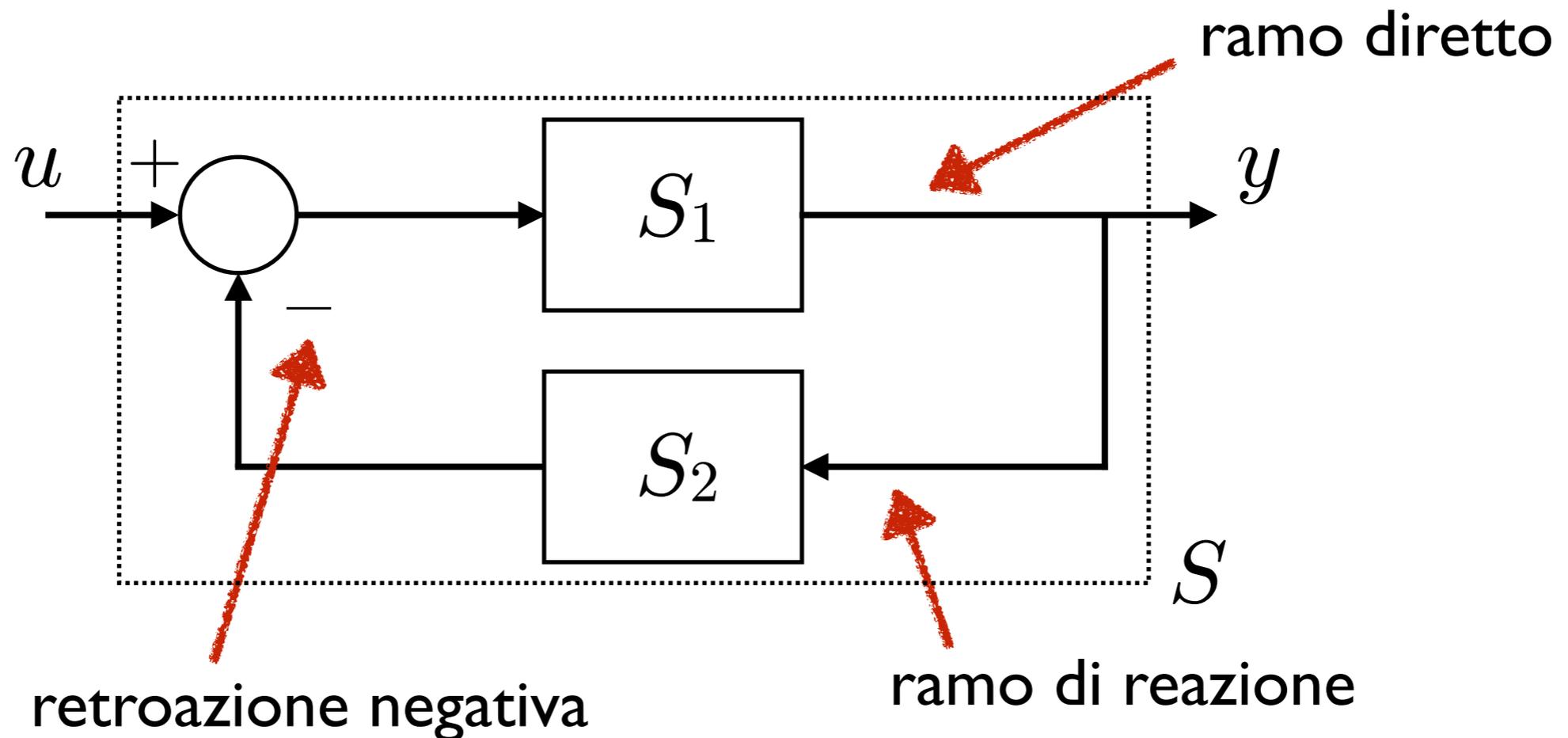
## Stabilità dei sistemi retroazionati

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INFORMATICA  
AUTOMATICA E GESTIONALE ANTONIO RUBERTI



SAPIENZA  
UNIVERSITÀ DI ROMA

# proprietà della retroazione (feedback)



- gli autovalori di  $S$  (sistema **retroazionato** o **ad anello chiuso**) sono in numero pari alla somma di quelli di  $S_1$  e  $S_2$ , ma **spostati** rispetto a questi
- eventuali autovalori nascosti (non raggiungibili e/o non osservabili) di  $S_1$  o  $S_2$  si ritrovano **immutati** in  $S$

- d'ora in poi si assume che  $S_1$  e  $S_2$  siano **SISO** (hyp 0, restrittiva)
- dette  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$ ,  $W(s)$  le FdT di  $S_1$ ,  $S_2$ , e  $S$  si ha

$$W(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)}$$

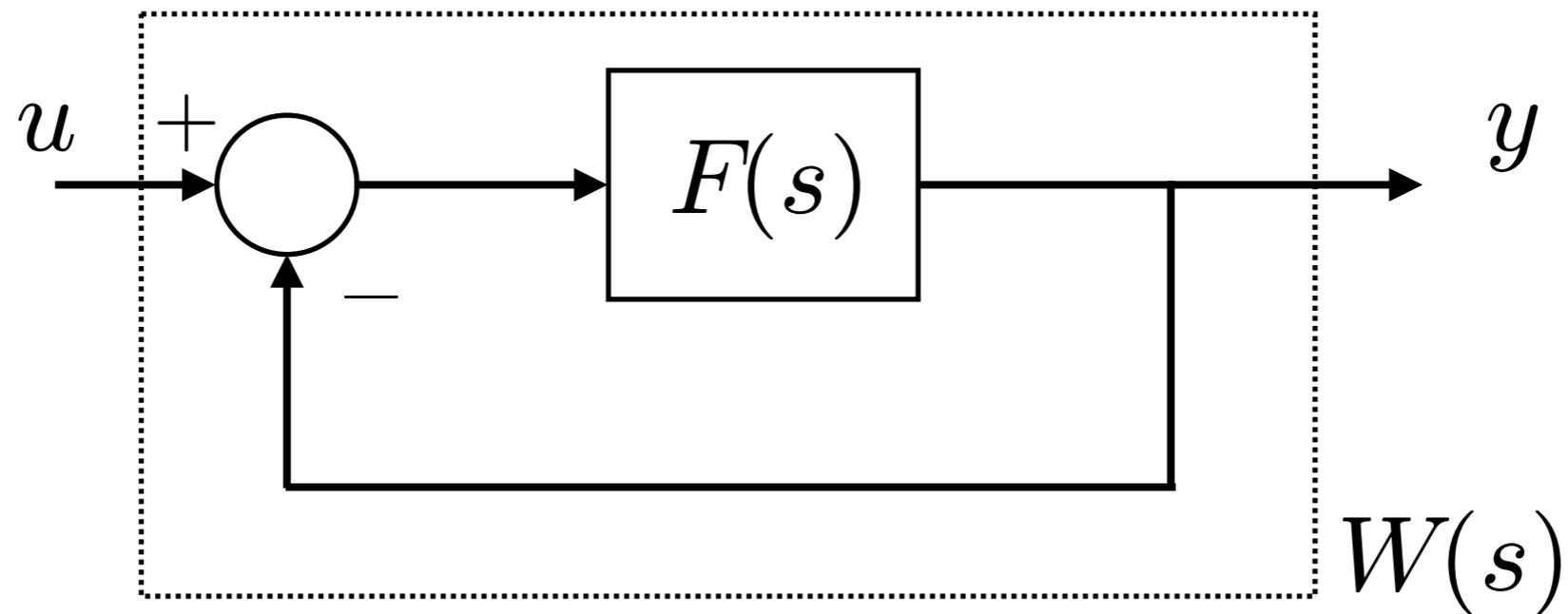
- i poli di  $W(s)$  sono **diversi** da quelli di  $F_1(s)$ ,  $F_2(s)$
- se  $F_2(s) = k_R$  (retroazione negativa **costante**) si ha

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + k_R F(s)} = \frac{N_F(s)}{D_F(s) + k_R N_F(s)}$$

avendo posto  $F_1(s) = F(s) = N_F(s) / D_F(s)$

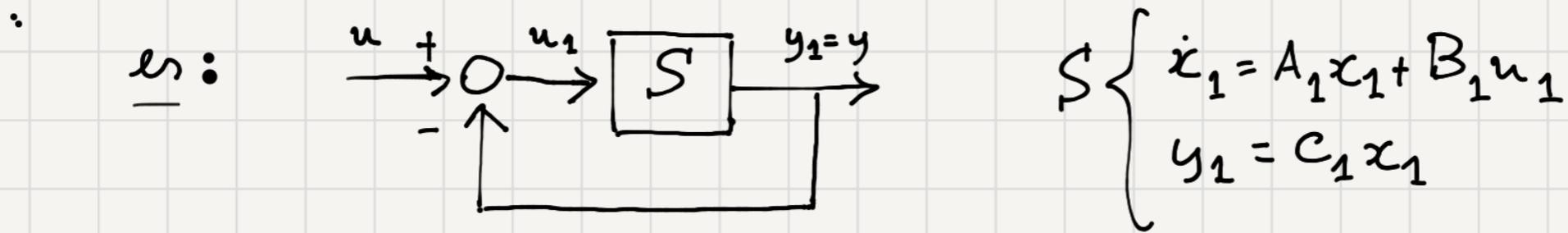
- in questo caso, i poli di  $W(s)$  sono quanti quelli di  $F(s)$  ma **spostati** (niente cancellazioni); gli zeri invece sono immutati
- caso notevole  $k_R = 1$  (retroazione negativa **unitaria**)

# stabilità dei sistemi in retroazione



- si farà riferimento a una **retroazione negativa unitaria** (**hyp 1, non restrittiva** perché qualunque retroazione con  $F_2(s)$  sul ramo di reazione si può scrivere come la cascata di  $1/F_2(s)$  e di una retroazione negativa unitaria con  $F_1(s) F_2(s)$  come FdT del ramo diretto)
- nel seguito si assume che  $F(s)$  non nasconda autovalori con  $Re[ ] \geq 0$  (**hyp 2, restrittiva**)

- se l'hyp 2 è violata il sistema retroazionato sarà sempre instabile!



$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = (1 \ 0) \quad \text{autovalori } \{-1, 1\}$$

$$F(s) = C_1 (sI - A)^{-1} B_1 = \frac{1}{s+1}$$

↳ FdTD di S

l'autovalore 1 è nascosto (né raggiungibile né osservabile)

sistema retroazionato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 (u - y_1) = (A_1 - B_1 C_1) x_1 + B_1 u \\ y_1 = C_1 x_1 \end{cases}$$

$$A_1 - B_1 C_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{autovalori } \{-2, 1\}$$

↳ spostato

↳ invariato! e ancora NASCOSTO!

$$e \ W(s) = C_1 (sI - (A_1 - B_1 C_1))^{-1} B_1 = \frac{1}{s+2}$$

←

- nell'**hyp 2** la stabilità del sistema retroazionato dipende solo **dalla collocazione dei suoi poli**
- in particolare, la collocazione dei poli della FdT ad anello chiuso  $W(s)$  si può mettere in relazione con l'andamento del diagramma di Nyquist (**ddN**) della risposta armonica ad anello aperto  $F(j\omega)$
- **fatto A**:  $W(s)$  ha poli con  $Re[\ ]=0$  se e solo se il ddN di  $F(j\omega)$  passa per  $(-1,0)$  (**punto critico**)
- **fatto B**: se  $F(s)$  non ha poli con  $Re[\ ]=0$  (**hyp 3**), si ha

$$\begin{array}{c}
 \text{numero di giri} \\
 \text{del ddN di } F(j\omega) \\
 \text{intorno al punto critico} \\
 \text{(positivi in senso orario)}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow \\
 N_F = n_W^+ - n_F^+ \\
 \nwarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{numero di poli di } W(s) \\
 \text{con } Re[\ ]>0
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nwarrow \\
 \text{numero di poli di } F(s) \\
 \text{con } Re[\ ]>0
 \end{array}$$

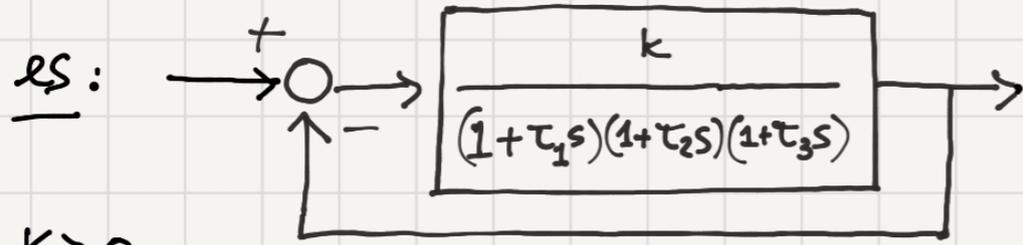
# Criterio di Nyquist (CdN)

Nelle **hyp 1,2**, e assumendo inoltre che  $F(s)$  non abbia poli con  $Re[s]=0$  (**hyp 3**), **il sistema retroazionato è AS se e solo se**

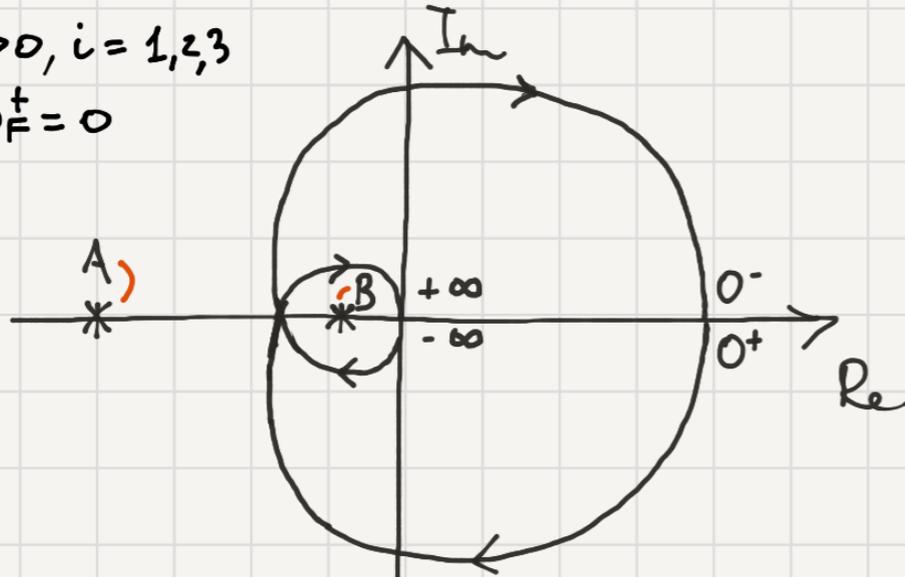
a. il ddN di  $F(j\omega)$  non passa per il punto critico

b.  $N_F^\rightarrow = -n_F^+$

- il criterio si ottiene dai fatti A e B imponendo che  $W(s)$  non abbia né poli con  $Re[s]=0$  né con  $Re[s]>0$
- se  $F(s)$  è priva di poli con  $Re[s]>0$ , la 2. diventa  $N_F^\rightarrow = 0$  (criterio **ridotto** di Nyquist)
- se a. è violata, il sistema retroazionato è SS o I
- se b. è violata, il sistema retroazionato è I con  $n_W^+ = N_F^\rightarrow + n_F^+$  poli con  $Re[s]>0$



$K > 0$   
 $\tau_i > 0, i = 1, 2, 3$   
 $\Rightarrow n_F^+ = 0$



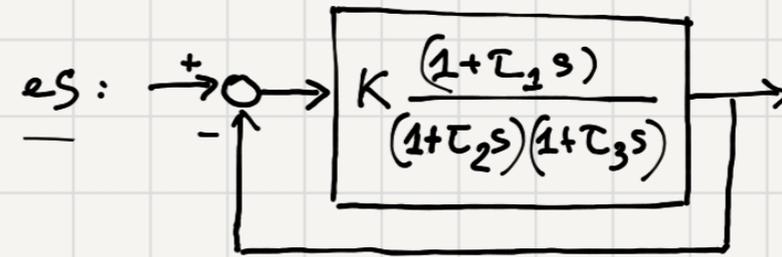
(A)  $K < K^*$      $N_F^- = 0$   
 $n_F^+ = 0$

$\Rightarrow$  sistema retroazionato AS

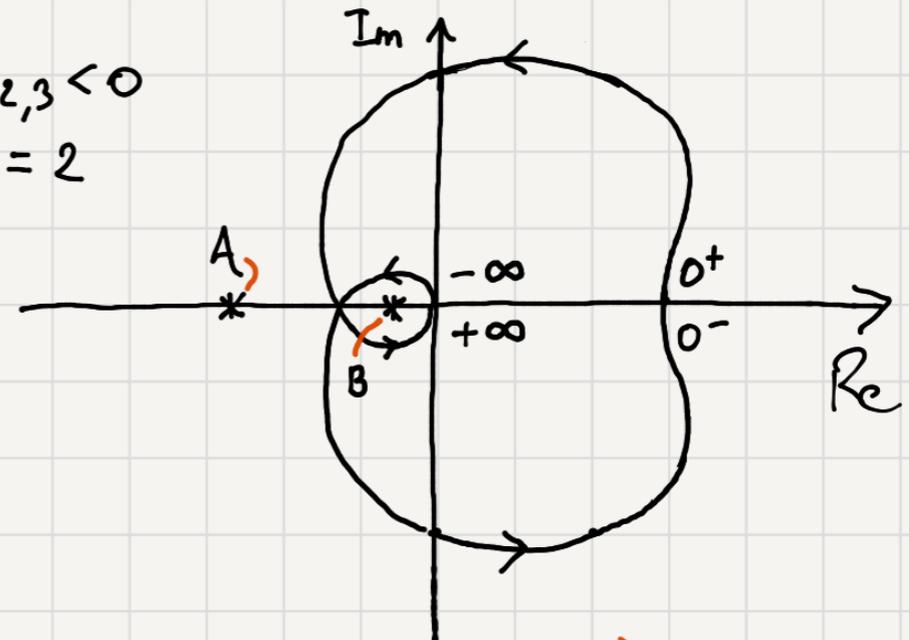
(B)  $K > K^*$      $N_F^- = 2$   
 $n_F^+ = 0$

$\Rightarrow$  sistema retroazionato I

con  $n_w^+ = N_F^- + n_F^+ = 2$



$K > 0$   
 $\tau_1 > 0, \tau_{2,3} < 0$   
 $\Rightarrow n_F^+ = 2$



(A)  $K < K^*$      $N_F^- = 0$   
 $n_F^+ = 2$

$\Rightarrow$  sistema retroazionato I

con  $n_w^+ = N_F^- + n_F^+ = 2$

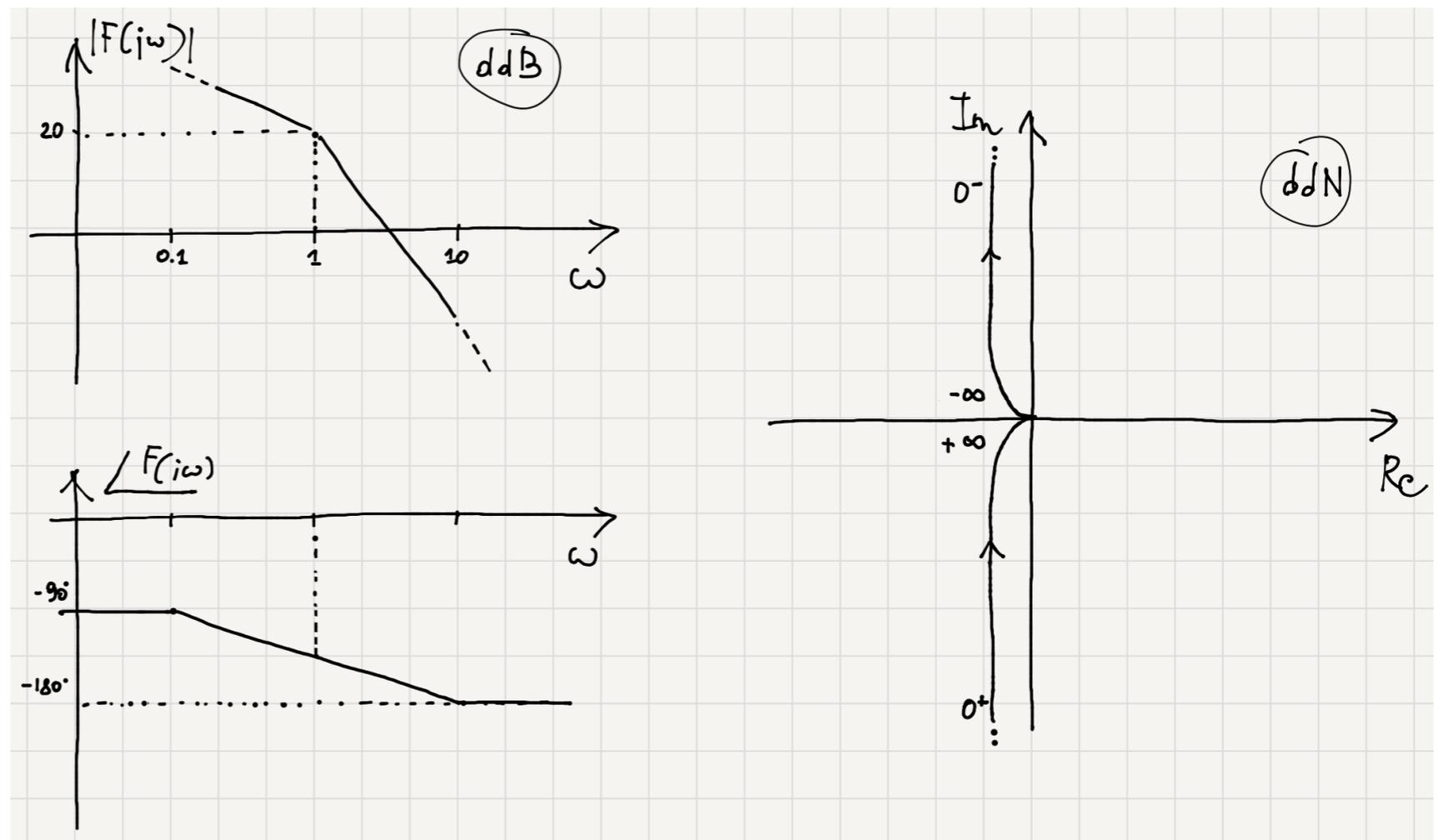
(B)  $K > K^*$      $N_F^- = -2$   
 $n_F^+ = 2$

$\Rightarrow$  sistema retroazionato AS

- per rimuovere l'**hyp 3** si deve ammettere che  $F(s)$  abbia poli con  $Re[ ]=0$ , cioè elementi integratori (poli nell'origine) o risonanti (poli immaginari coniugati)
- in questi casi, per  $\omega=0$  o  $\omega=\omega_n$  il modulo di  $F(j\omega)$  è  $\infty$  mentre la fase è discontinua, e dunque il ddN risulta essere **aperto** in corrispondenza a tali pulsazioni

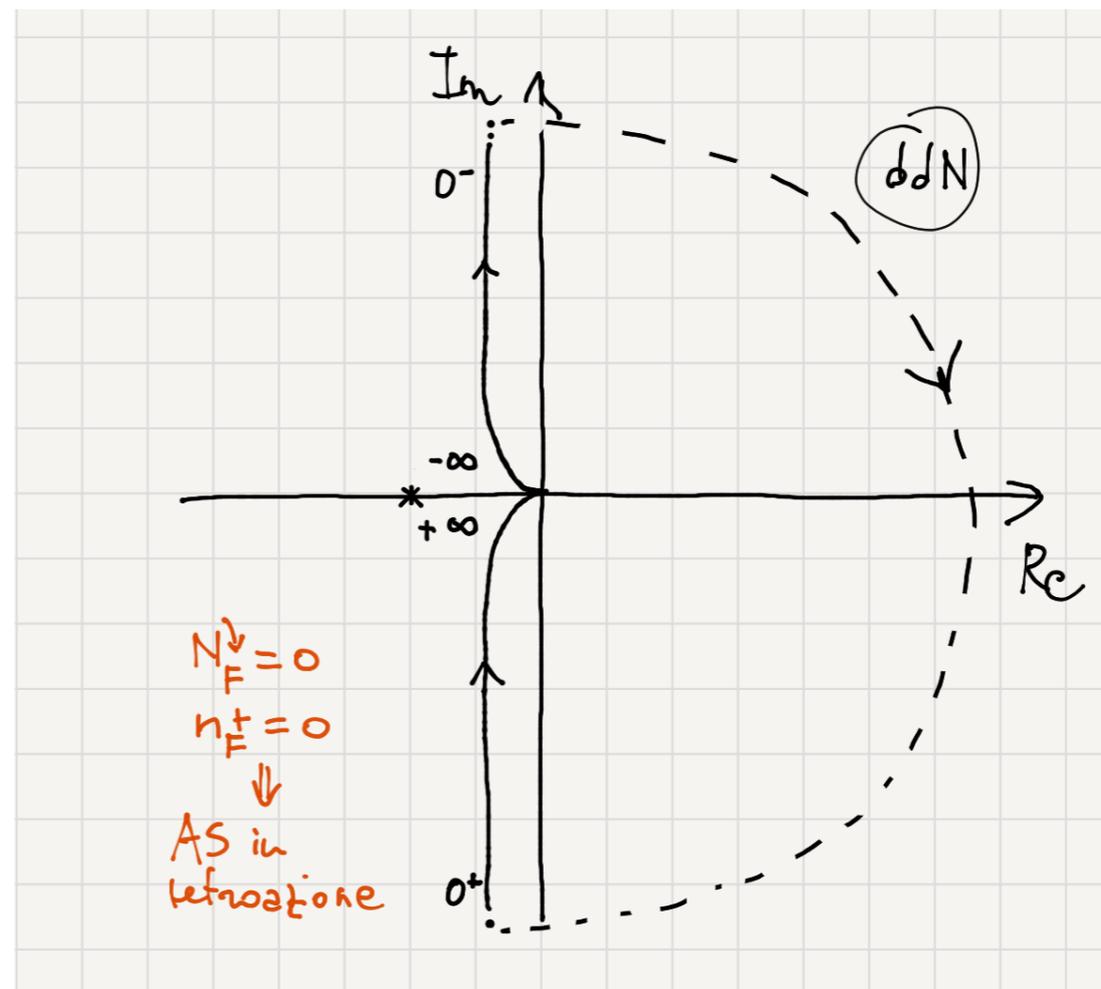
• es:

$$F(s) = 10/s(s+1)$$

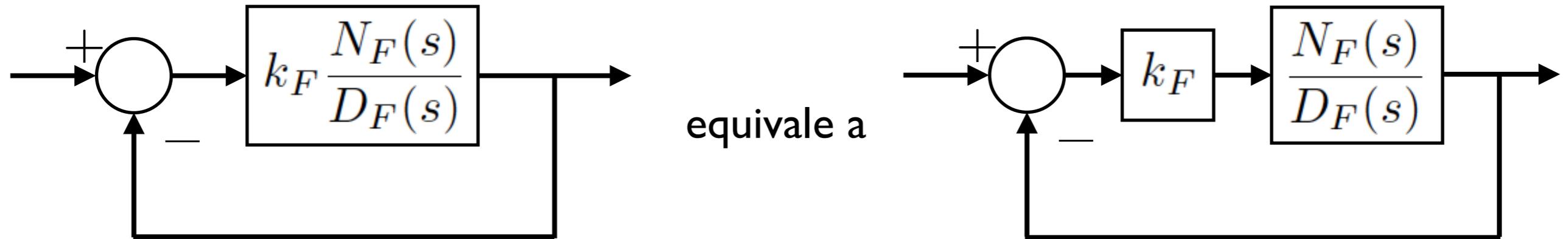


- per poterne contare i giri, si effettua una **chiusura all'infinito** del  $\partial dN$ : **mezzo giro in senso orario nel verso delle  $\omega$  crescenti** per ogni polo con  $Re[ ]=0$
- **con queste chiusure, il CdN si applica inalterato**; ovvero, è possibile rimuovere l'**hyp 3** dall'enunciato
- es precedente:

$$F(s) = 10/s(s+1)$$

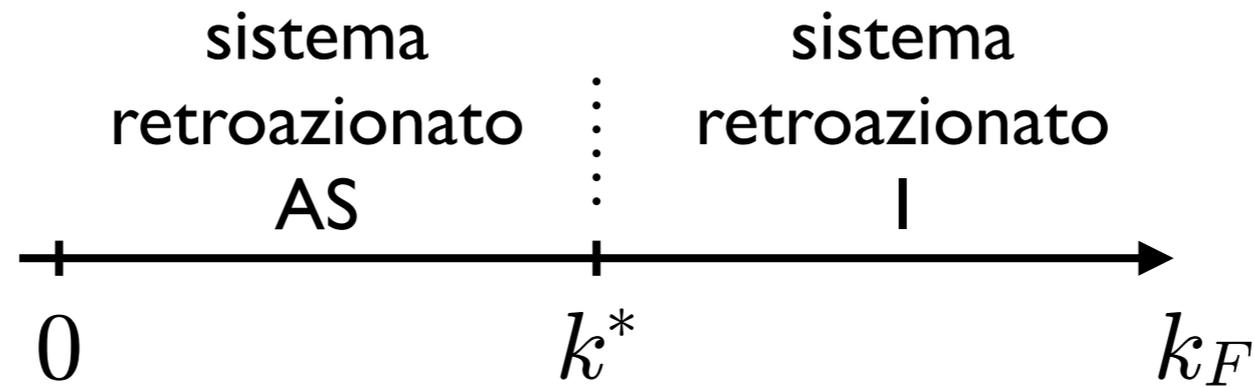


# influenza di $k_F$ sulla stabilità in retroazione

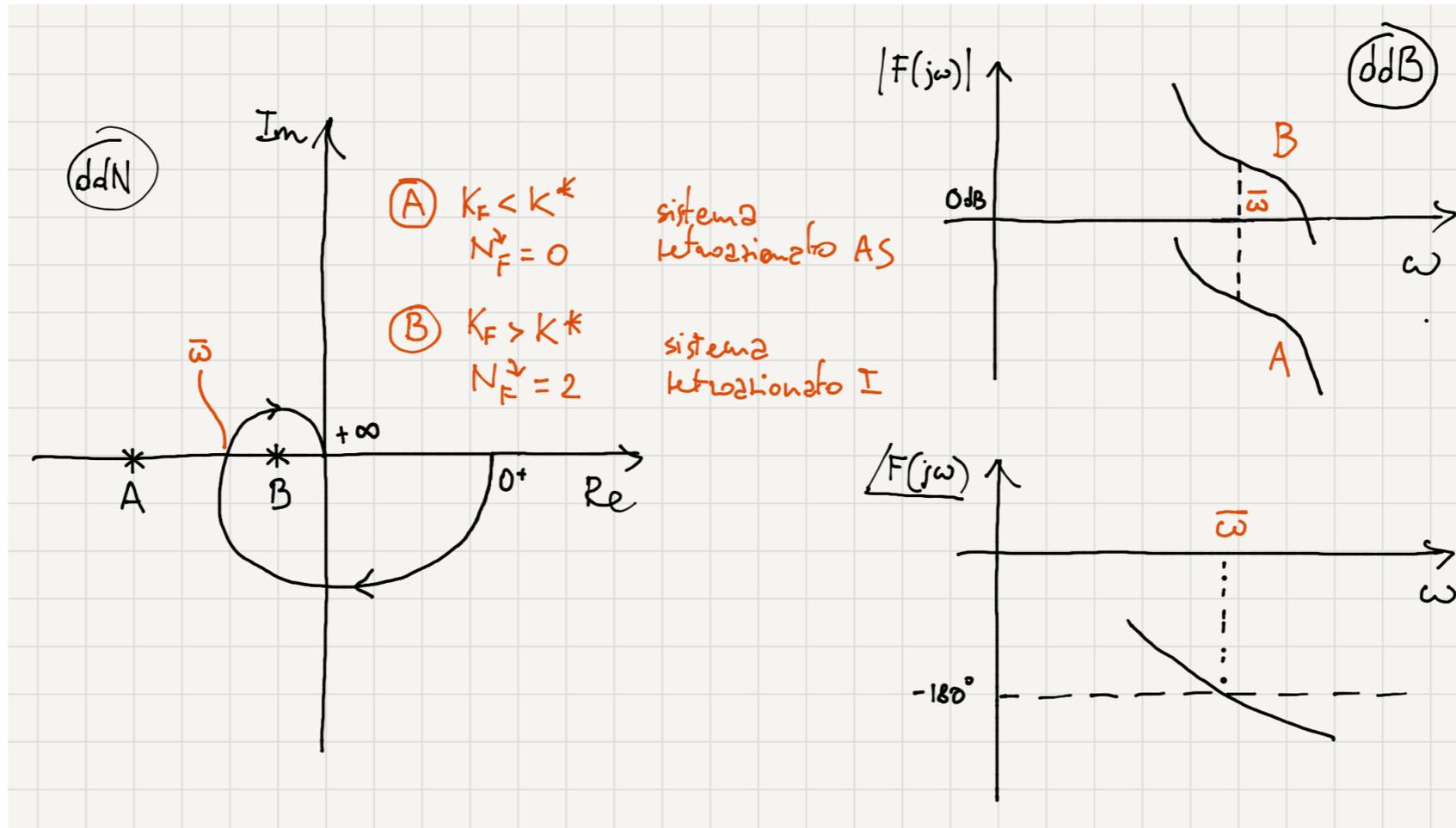


- $k_F$  si può dunque interpretare come la **quantità di retroazione**
- variazioni di  $k_F$  (attenzione: è propriamente il **guadagno** di  $F(s)$  solo se questa è in **forma di Bode**) non cambiano la forma del ddN di  $F(j\omega)$  ma solo la scala
- alternativamente, l'effetto di un aumento (diminuzione) di  $k_F$  si può studiare lasciando immutato il ddN di  $F(j\omega)$  e facendo scorrere il punto critico verso destra (sinistra)
- si riscontrano alcuni **comportamenti tipici**

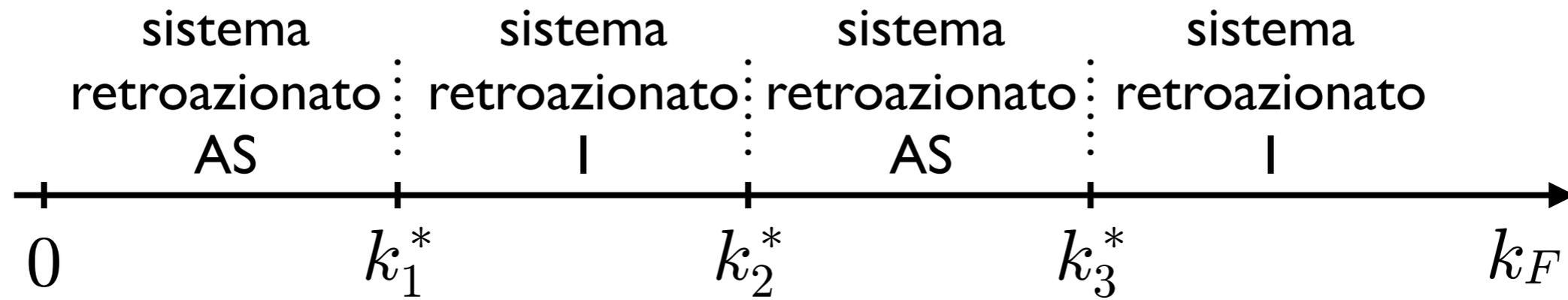
# stabilità regolare



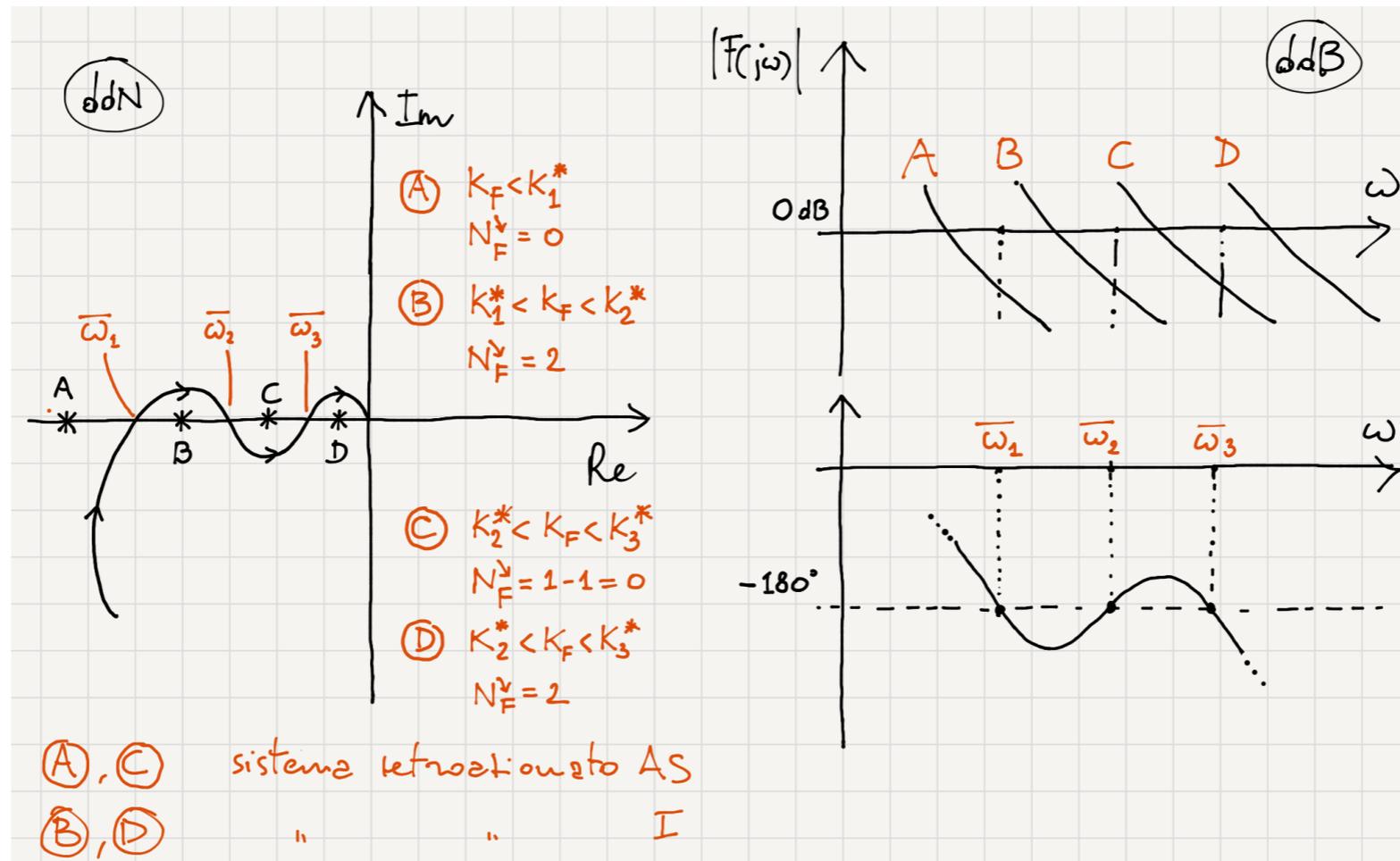
- si verifica se  $n_F^+ = 0$  e il  $ddN^+$  di  $F(j\omega)$  ha una sola intersezione con il semiasse reale negativo



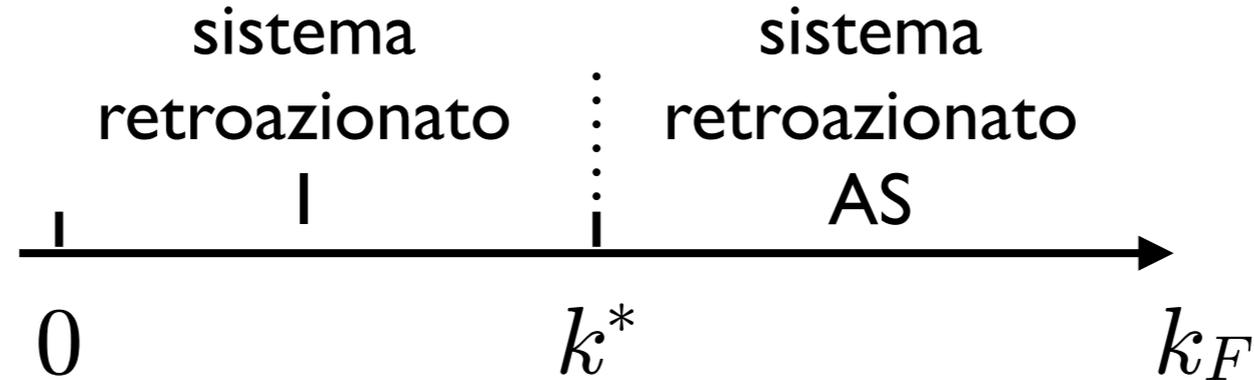
# stabilità condizionata



- si verifica se  $n_F^+ = 0$  e il  $ddN^+$  di  $F(j\omega)$  ha più di una intersezione con il semiasse reale negativo

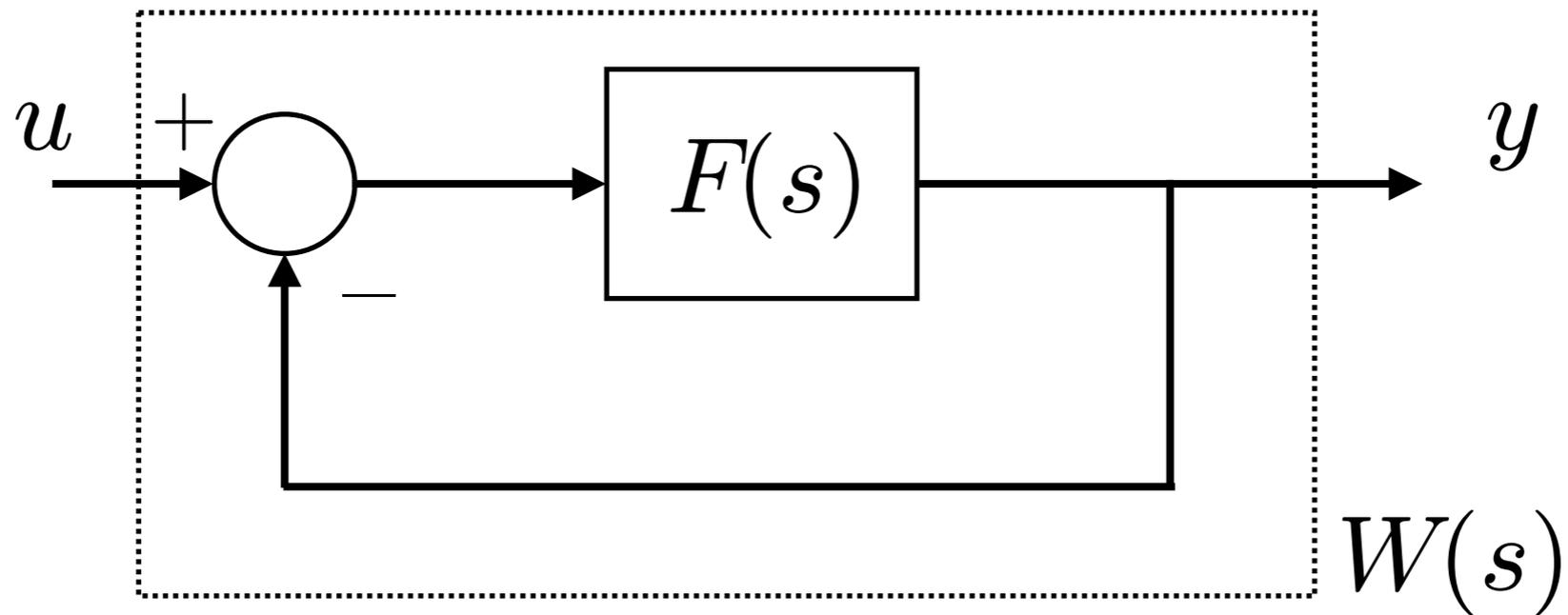


# stabilità paradossale



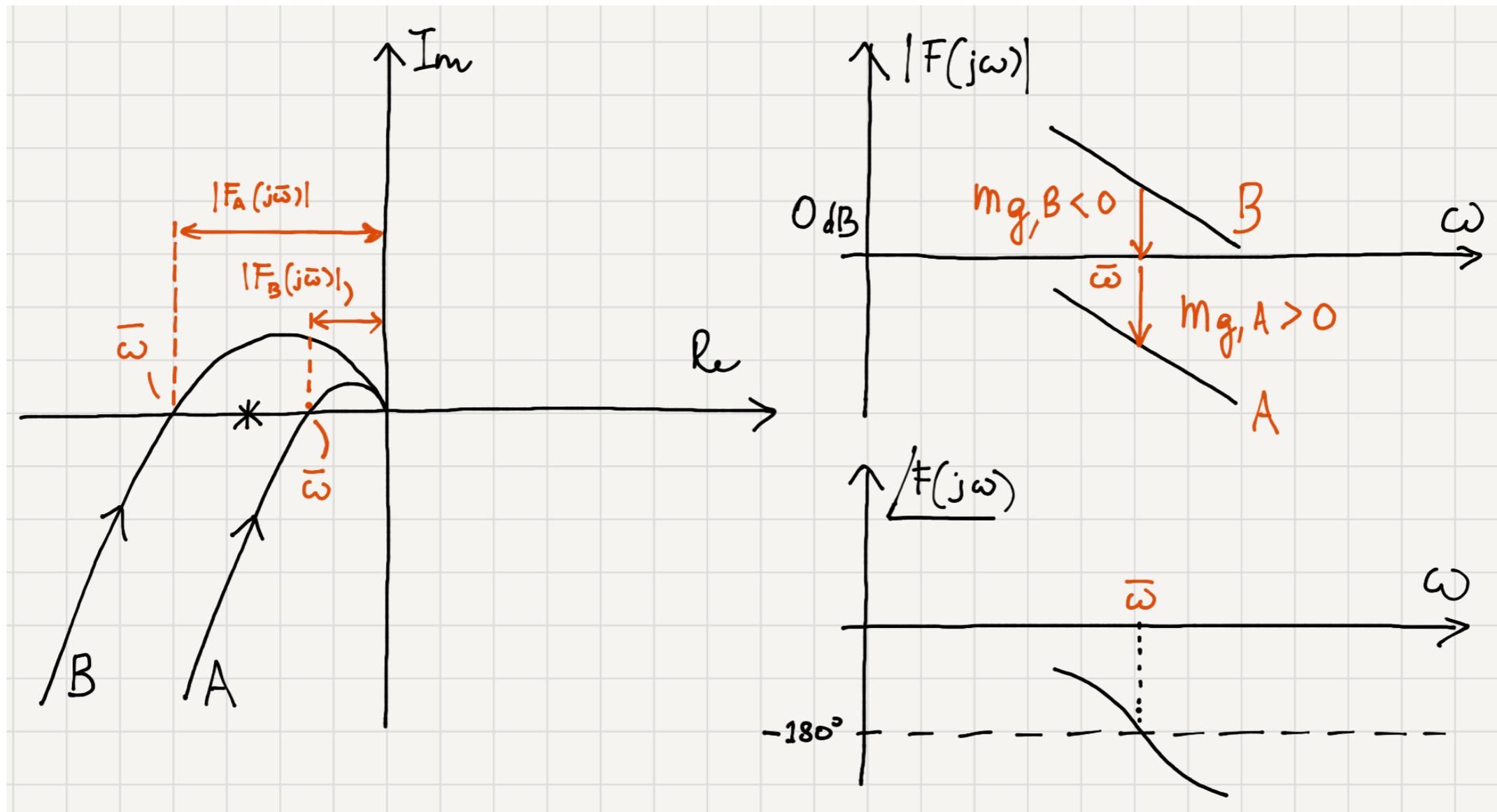
- si può verificare se  $n_F^+ > 0$  (cfr. secondo esempio slide 8)
- indica che per spostare i poli del sistema retroazionato dal semipiano destro a quello sinistro è necessaria “una certa quantità” di retroazione (come del resto per fare il contrario)
- questi comportamenti **non esauriscono** le possibilità: per esempio, ci sono sistemi che in retroazione sono AS o I per qualunque  $k_F > 0$

# margini di stabilità



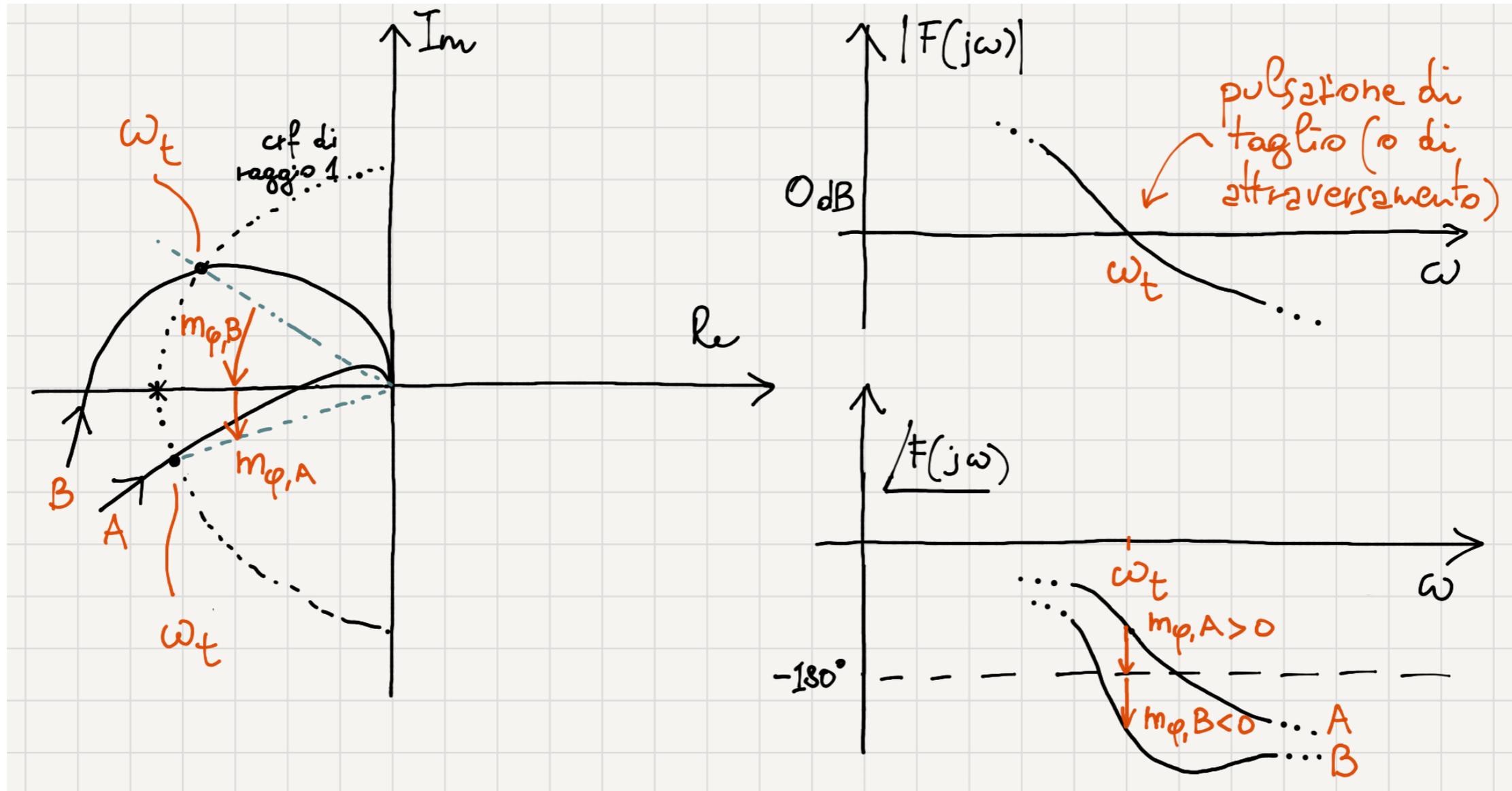
- caratterizzano quanto la stabilità asintotica del sistema retroazionato sia **robusta** rispetto a:
  - variazioni **del modulo** di  $F(s)$ , dovute (principalmente) a variazioni di  $k_F$
  - variazioni **della fase** di  $F(s)$ , dovute a spostamenti (o aggiunte) di zeri e/o poli
- si definiscono **solo** nel caso  $n_F^+ = 0$

# sistemi a stabilità regolare: variazioni del modulo



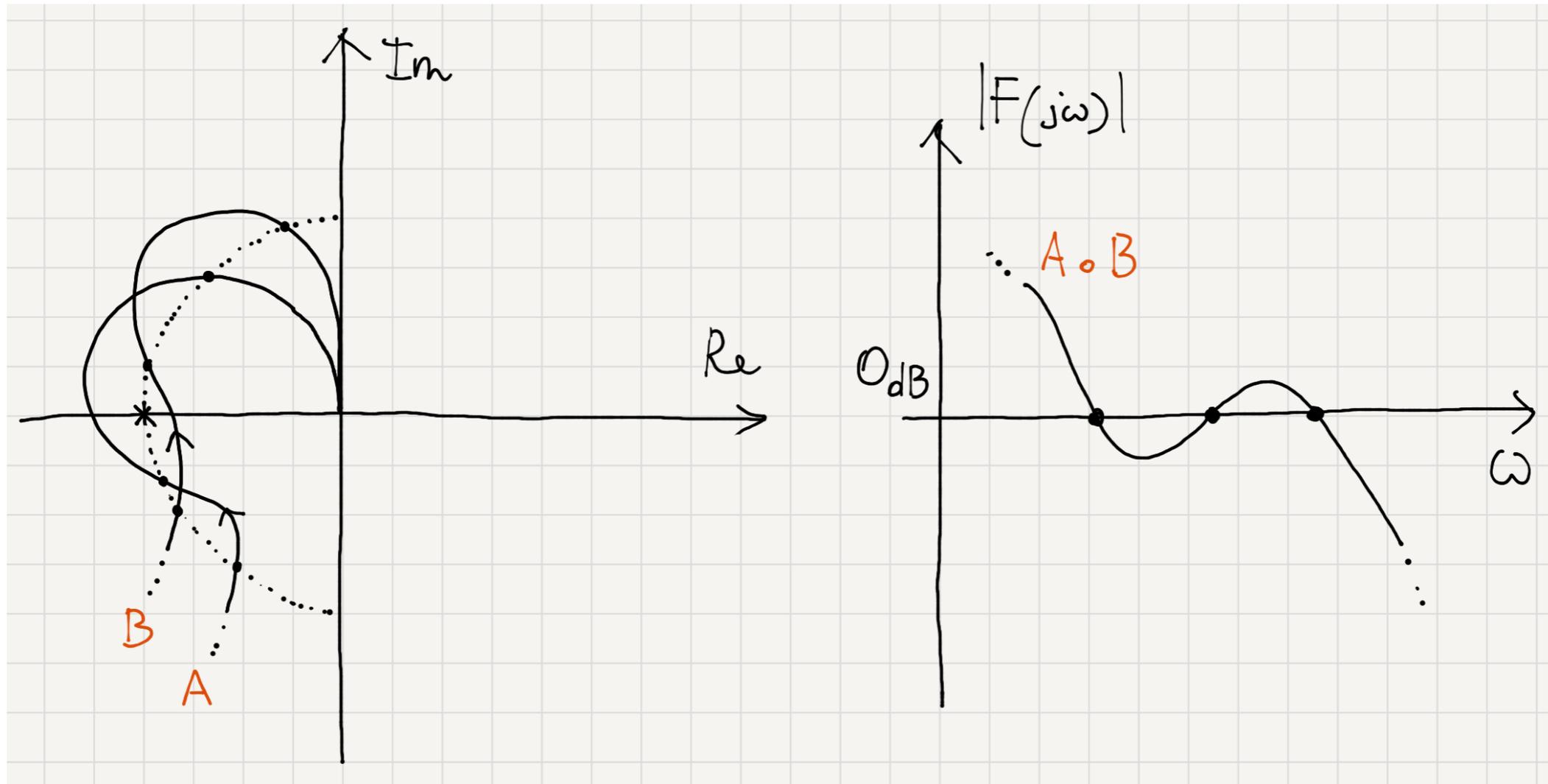
- $m_g = [1/|F(j\bar{\omega})|]_{dB} = -|F(j\bar{\omega})|_{dB}$   **margine di guadagno**
- più è grande  $m_g$ , più la stabilità in retroazione è robusta rispetto a variazioni del modulo; se  $m_g < 0$ , il sistema retroazionato è I

# sistemi a stabilità regolare: variazioni della fase



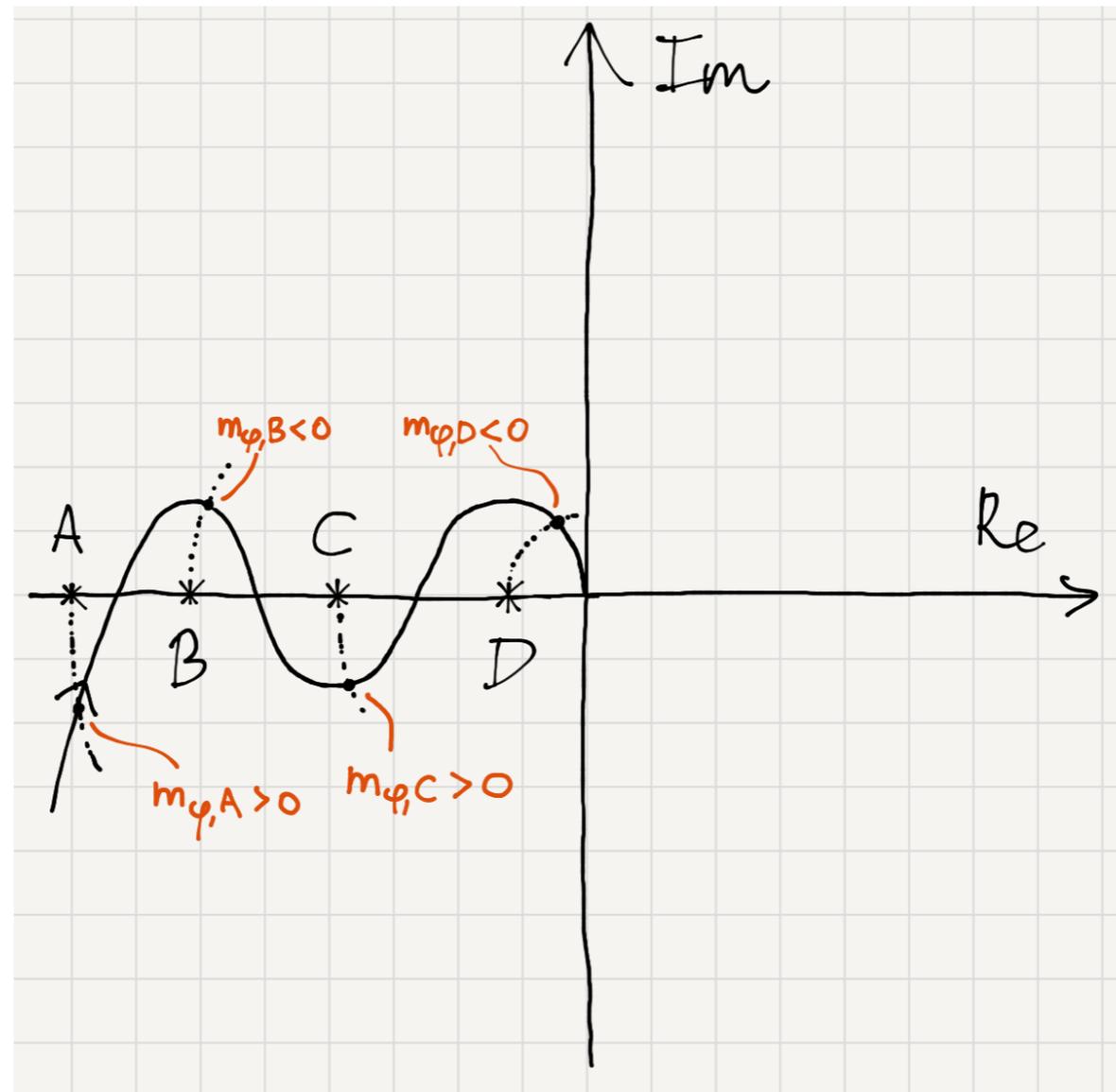
- $m_\varphi = 180^\circ + \angle F(j\omega_t)$  **margin  
di fase**
- più è grande  $m_\varphi$ , più la stabilità in retroazione è robusta rispetto a variazioni della fase; se  $m_\varphi < 0$ , il sistema retroazionato è I

# stabilità regolare: situazioni ambigue



- se il  $\text{ddN}^+$  di  $F(j\omega)$  ha intersezioni multiple con la crf di raggio unitario, esiste più di una pulsazione di attraversamento
- in questo caso  $m_\varphi$  **non è definito univocamente e perde di significato** (mentre  $m_g$  è sempre ben definito per sistemi a stabilità regolare)

# margini nei sistemi a stabilità condizionata



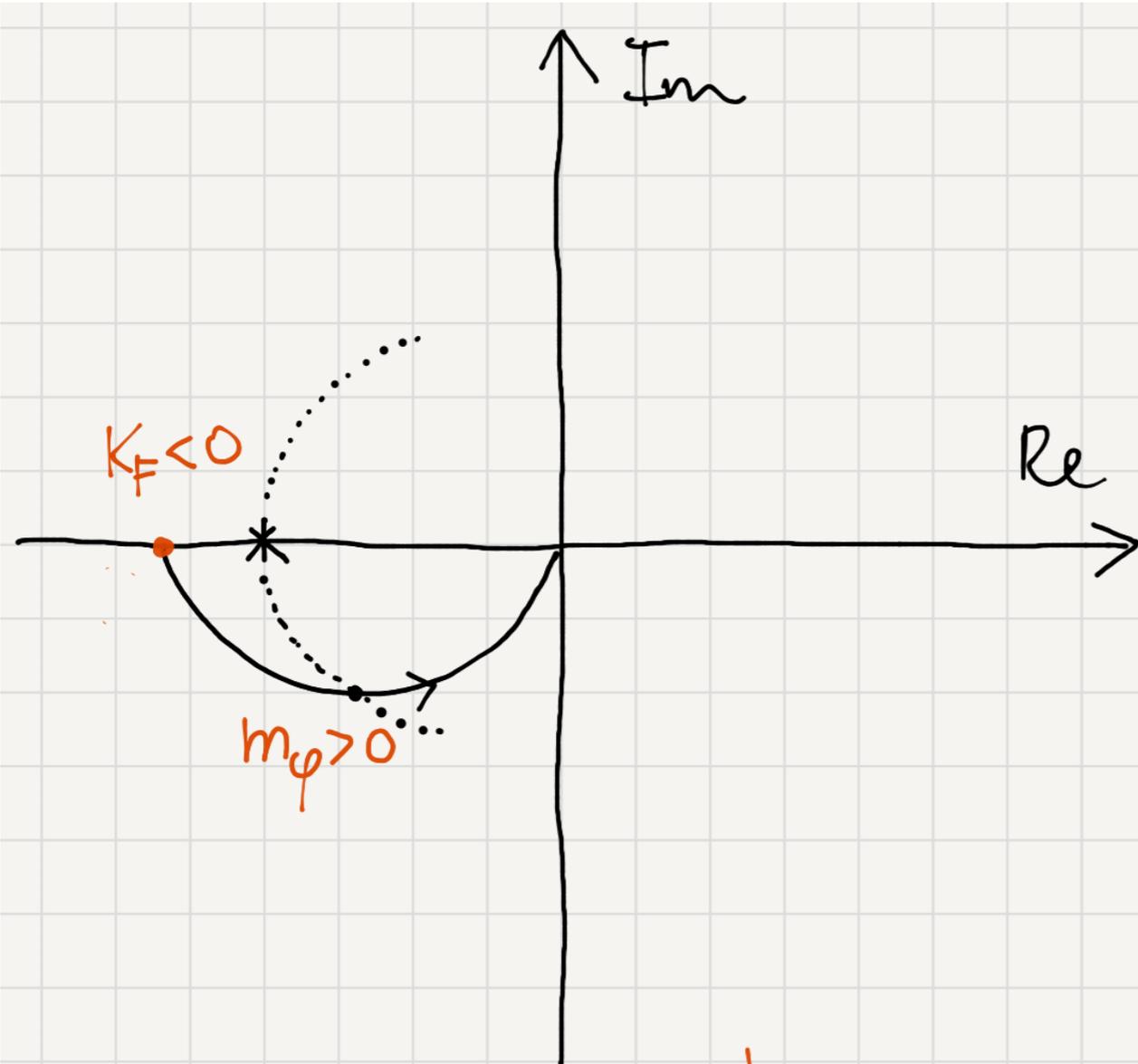
- anche nei sistemi a stabilità condizionata,  $m_{\varphi}$  caratterizza la robustezza della stabilità rispetto a variazioni della fase purché sia definito univocamente; se  $m_{\varphi} < 0$ , il sistema retroazionato è I
- $m_g$  è invece **strutturalmente ambiguo**

# Criterio di Bode (CdB)

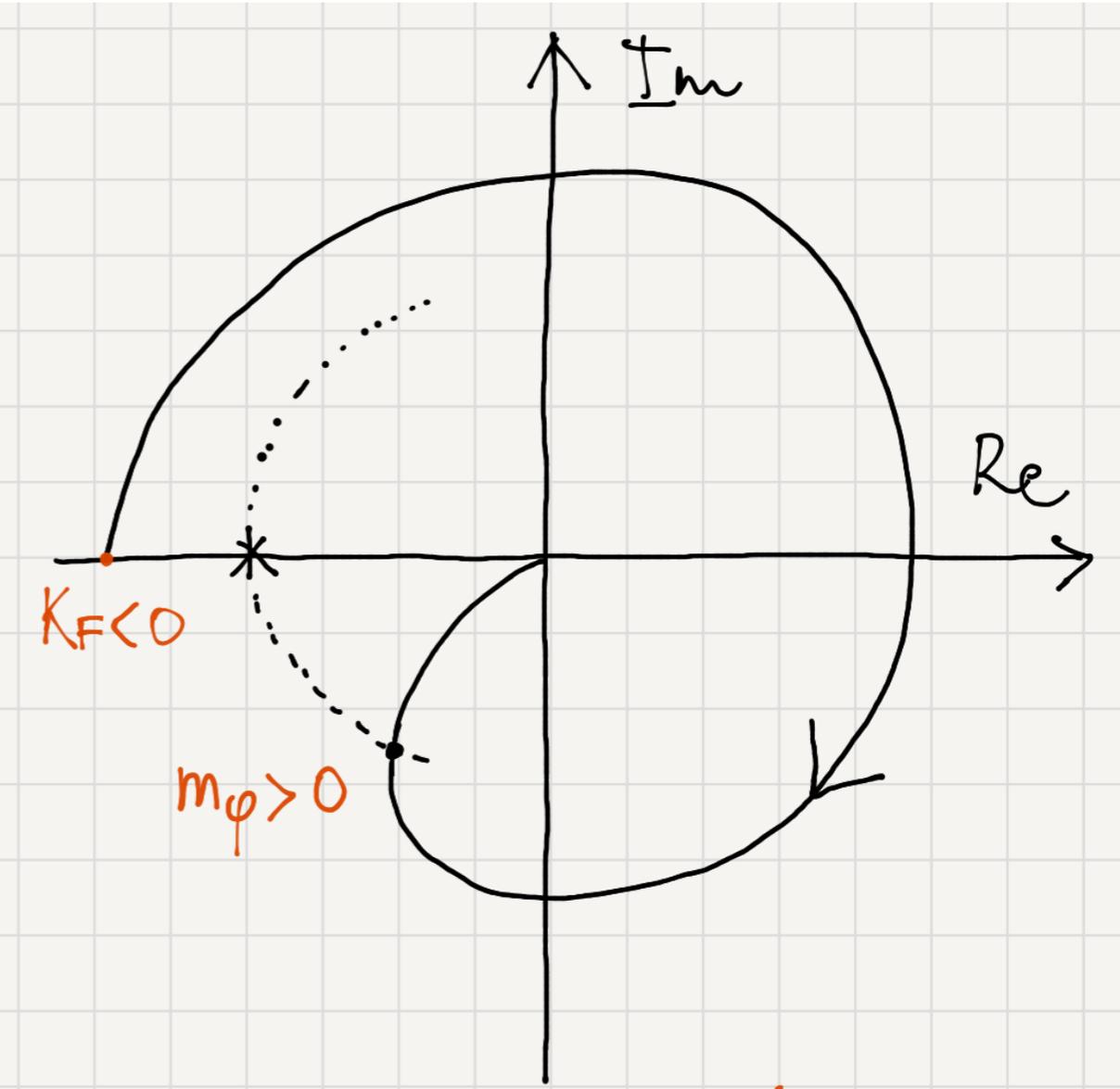
Si assumano vere le **hyp 1** e **2**. Inoltre, si assuma che  $n_F^+ = 0$  e che  $m_\varphi$  sia definito univocamente. In questo caso, **il sistema retroazionato è AS se e solo se**

- a.  $m_\varphi > 0$
- b.  $k_F > 0$

- il CdB è una conseguenza diretta del CdN per il caso  $n_F^+ = 0$
- consente di giudicare la stabilità del sistema retroazionato direttamente dai ddB (uso nel **progetto in frequenza**)
- la condizione  $k_F > 0$  è **necessaria** per evitare situazioni del tipo...



$N_F^{\downarrow} = -1 \Rightarrow$  sistema retroazionato  
 I



$N_F^{\downarrow} = 1 \Rightarrow$  sistema retroazionato  
 I